ALGEBRA

A. BALDOR

CONCEPTO DE NUMERO EN LOS PUEBLOS PRIMITIVOS (25,000-5,000 A. C.) Medir y contar fueron las primeras actividades matemáticas del hombre primitivo. Haciendo marcas en los troncos de los árboles lograban, estos primeros pueblos, la medición del tiempo y el conteo del número de animales que poseían; así surgió la Aritmética. El origen del Algebra es posterior. Pasaron cientos de siglos para que el hombre alcanzara un concepto abstracto del número, base indispensable para la formación de la ciencia algebraica.

PRELIMINARES

1 **ALGEBRA** es la rama de la Matemática que estudia la cantidad considerada del modo más general posible.

2 CARACTER DEL ALGEBRA Y SU DIFERENCIA CON LA ARITMETICA

El concepto de la cantidad en Algebra es mucho más amplio que en Aritmética.

En Aritmética las cantidades se representan por **números** y éstos expresan valores **determinados**. Así, 20 expresa un solo valor: **veinte**; para expresar un valor mayor o menor que éste habrá que escribir un número distinto de 20.

En Algebra, para lograr la **generalización**, las cantidades se representan por medio de **letras**, las cuales pueden **representar todos los valores**. Así, *a* representa el **valor que nosotros le asignemos**, y por tanto puede representar 20 o más de 20 o menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignamos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar, en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

3 NOTACION ALGEBRAICA

Los **símbolos** usados en Algebra para representar las cantidades son los **números** y las **letras**.

Los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas.

Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas.

Las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto: $a, b, c, d \ldots$

Las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z.

Una misma letra puede representar distintos valores diferenciándolos por medio de comillas; por ejemplo: a', a'', a''', que se leen **a prima**, **a segunda**, **a tercera**, o también por medio de subíndices; por ejemplo: a_1, a_2, a_3, que se leen **a subuno**, **a subdos**, **a subtres**.

4 FORMULAS

Consecuencia de la generalización que implica la representación de las cantidades por medio de letras son las **fórmulas algebraicas**.

Fórmula algebraica es la representación, por medio de letras, de una regla o de un principio general.

Así, la Geometría enseña que el área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura; luego, llamando A al área del rectángulo, b a la base y h a la altura, la fórmula

$$A = b \times h$$

representará de un modo general el área de **cualquier rectángulo**, pues el área de un rectángulo dado se obtendrá con sólo sustituir b y h en la fórmula anterior por sus valores en el caso dado. Así, si la base de un rectángulo es 3 m. y su altura 2 m., su área será:

$$A = b \times h = 3 \text{ m.} \times 2 \text{ m.} = 6 \text{ m.}^2.$$

El área de otro rectángulo cuya base fuera 8 m. y su altura $3\frac{1}{2}$ m. sería:

$$A = b \times h = 8 \text{ m.} \times 3\tfrac{1}{2} \text{ m.} = 28 \text{ m.}^2. (\ )$$

5 SIGNOS DEL ALGEBRA

Los signos empleados en Algebra son de tres clases: Signos de Operación, Signos de Relación y Signos de Agrupación.

6 SIGNOS DE OPERACION

En Algebra se verifican con las cantidades las mismas operaciones que en Aritmética: Suma, Resta, Multiplicación, División, Elevación a Potencias y Extracción de Raíces, que se indican con los signos siguientes:

El Signo de la Suma es +, que se lee **más**. Así $a + b$ se lee "a más b".

( ) En el Cap. XVIII, página 270, se estudia ampliamente todo lo relacionado con las fórmulas algebraicas.

El Signo de la Resta es $-$, que se lee **menos**. Así, $a - b$ se lee "a menos b".

El Signo de la Multiplicación es $\times$, que se lee **multiplicado por**. Así, $a \times b$ se lee "a multiplicado por b".

En lugar del signo $\times$ suele emplearse **un punto** entre los factores y también se indica la multiplicación colocando los factores entre paréntesis. Así, $a.b$ y $(a)(b)$ equivalen a $a \times b$.

Entre factores literales o entre un factor numérico y uno literal el signo de multiplicacion **suele omitirse**. Así abc equivale a $a \times b \times c$; $5xy$ equivale a $5 \times x \times y$.

El Signo de la División es $\div$, que se lee **dividido entre**. Así, $a \div b$ se lee "a dividido entre b". También se indica la división separando el dividendo y el divisor por una raya horizontal. Así, $\frac{m}{n}$ equivale a $m \div n$.

El Signo de la Elevación a Potencia es el exponente, que es un número pequeño colocado arriba y a la derecha de una cantidad, el cual indica las veces que dicha cantidad, llamada **base**, se toma como factor. Así,

$$a^3 = aaa; \quad b^4 = bbb$$

Cuando una letra **no tiene exponente**, su exponente es **la unidad**. Así, a equivale a a^1; mnx equivale a $m^1n^1x^1$.

El Signo de Raíz es $\sqrt{\ }$, llamado **signo radical**, y bajo este signo se coloca la cantidad a la cual se le extrae la raíz. Así, $\sqrt{a}$ equivale a **raíz cuadrada** de a, o sea, la cantidad que elevada al cuadrado reproduce la cantidad a; $\sqrt[3]{b}$ equivale a **raíz cúbica** de b, o sea la cantidad que elevada al cubo reproduce la cantidad b.

7 COEFICIENTE

En el producto de dos factores, cualquiera de los factores es llamado **coeficiente** del otro factor.

Así, en el producto $3a$ el factor 3 es coeficiente del factor a e indica que el factor a se toma como sumando tres veces, o sea $3a = a + a + a$; en el producto $5b$, el factor 5 es coeficiente de b e indica que $5b = b + b + b + b + b$. Estos son **coeficientes numéricos**.

En el producto ab, el factor a es coeficiente del factor b, e indica que el factor b se toma como sumando a veces, o sea $ab = b + b + b + b \ldots a$ veces. **Este es un coeficiente literal.**

En el producto de más de dos factores, uno o varios de ellos son el coeficiente de los restantes. Así, en el producto $abcd$, a es el coeficiente de bcd; ab es el coeficiente de cd; abc es el coeficiente de d.

Cuando una cantidad **no tiene coeficiente numérico**, su coeficiente es **la unidad**. Así, b equivale a $1b$; abc equivale a $1abc$.

8 SIGNOS DE RELACION

Se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades. Los principales son:

$=$, que se lee **igual a**. Así, $a=b$ se lee "a igual a b".
$>$, que se lee **mayor que**. Así, $x+y>m$ se lee "$x+y$ mayor que m".
$<$, que se lee **menor que**. Así, $a<b+c$ se lee "a menor que $b+c$".

9 SIGNOS DE AGRUPACION

Los signos de agrupación son: el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], las llaves { } y la barra o vínculo ——.

Estos signos indican que la operación colocada entre ellos debe efectuarse primero. Así, $(a+b)c$ indica que el resultado de la suma de a y b debe multiplicarse por c; $[a-b]m$ indica que la diferencia entre a y b debe multiplicarse por m; $\{a+b\}\div\{c-d\}$ indica que la suma de a y b debe dividirse entre la diferencia de c y d.

10 MODO DE RESOLVER LOS PROBLEMAS EN ARITMETICA Y EN ALGEBRA

Exponemos a continuación un ejemplo para hacer notar la diferencia entre el método aritmético y el algebraico en la resolución de problemas, fundado este último en la **notación** algebraica y en la **generalización** que ésta implica.

Las edades de A y B suman 48 años. Si la edad de B es 5 veces la edad de A, ¿qué edad tiene cada uno?

METODO ARITMETICO

Edad de A más edad de $B=48$ años.

Como la edad de B es 5 veces la de A, tendremos:

Edad de A más 5 veces la edad de $A=48$ años.

O sea, 6 veces la edad de $A=48$ años;

luego, Edad de $A=8$ años. R.
Edad de $B=8$ años $\times 5=40$ años. R.

METODO ALGEBRAICO

Como la edad de A es una cantidad desconocida la represento por x.

Sea $x=$ edad de A.
Entonces $5x=$ edad de B.

Como ambas edades suman 48 años, tendremos:

$$x+5x=48 \text{ años;}$$

o sea,

$$6x=48 \text{ años.}$$

Si 6 veces x equivale a 48 años, x valdrá la sexta parte de 48 años,

o sea $x=8$ años, edad de A. R.
Entonces $5x=8$ años $\times 5=40$ años, edad de B. R.

11 CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

En Algebra, cuando se estudian cantidades que pueden tomarse en **dos sentidos opuestos** o que son de **condición o de modo de ser opuestos**, se expresa el sentido, condición o modo de ser (valor relativo) de la cantidad por medio de los **signos** + y −, anteponiendo el **signo** + a las cantidades tomadas en un sentido determinado (**cantidades positivas**) y anteponiendo el **signo** − a las cantidades tomadas en **sentido opuesto** al anterior (**cantidades negativas**).

Así, el **haber** se designa con el signo + y las **deudas** con el signo −. Para expresar que una persona tiene $100 de haber, diremos que tiene +$100, y para expresar que debe $100, diremos que **tiene** −$100.

Los **grados sobre cero** del termómetro se designan con el signo + y los **grados bajo cero** con el signo −. Así, para indicar que el termómetro marca 10° sobre cero escribiremos +10° y para indicar que marca 8° bajo cero escribiremos −8°.

El camino recorrido a la **derecha o hacia arriba de un punto** se designa con el signo + y el camino recorrido a la **izquierda o hacia abajo** de un punto se representa con el signo −. Así, si hemos recorrido 200 m. a la derecha de un punto dado, diremos que hemos recorrido +200 m., y si recorremos 300 m. a la izquierda de un punto escribiremos −300 m.

El tiempo transcurrido **después de Cristo** se considera positivo y el tiempo transcurrido **antes de Cristo**, negativo. Así, +150 años significa 150 años D. C. y −78 años significa 78 años A. C.

En un poste introducido en el suelo, representamos con el signo + la porción que se halla del suelo **hacia arriba** y con el signo − la porción que se halla del suelo **hacia abajo**. Así, para expresar que la longitud del poste que se halla del suelo hacia arriba mide 15 m., escribiremos +15 m., y si la porción introducida en el suelo es de 8 m., escribiremos −8 m.

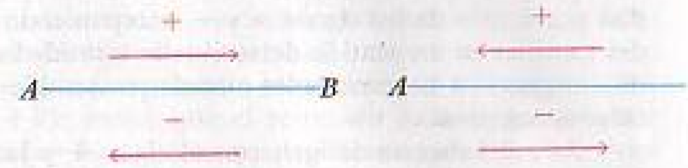
La **latitud norte** se designa con el signo + y la **latitud sur** con el signo −; la **longitud este** se considera positiva y la **longitud oeste**, negativa. Por lo tanto, un punto de la Tierra cuya situación geográfica sea: +45° de longitud y −15° de latitud se hallará a 45° al este del primer meridiano y a 15° bajo el Ecuador.

12 ELECCION DEL SENTIDO POSITIVO

La fijación del sentido positivo en cantidades que pueden tomarse en dos sentidos opuestos es arbitraria, depende de nuestra voluntad; es decir, que podemos tomar como sentido positivo el que queramos; pero una vez fijado el sentido positivo, el **sentido opuesto** a éste será el negativo.

Así, si tomamos como sentido **positivo** el camino recorrido a la derecha de un punto, el camino recorrido a la **izquierda** de ese punto será **negativo**, pero nada nos impide tomar como **positivo** el camino recorrido a la **izquierda** del punto y entonces el camino recorrido a la **derecha** del punto sería negativo.

Así, si sobre el segmento AB tomamos como **positivo** el sentido de A hacia B, el sentido de B hacia A sería **negativo**, pero si fijamos como sentido **positivo** de B hacia A, el sentido de A hacia B sería **negativo**.



No obstante, en la práctica se aceptan generalmente los sentidos positivos de que se trató en el número anterior.

13 **CERO** es la ausencia de cantidad. Así, representar el estado económico de una persona por 0 equivale a decir que no tiene haber ni deudas.

Las cantidades positivas son **mayores que 0** y las negativas **menores que 0**. Así, $+3$ es una cantidad que es tres unidades **mayor** que 0; $+5$ es una cantidad que es cinco unidades **mayor** que 0, mientras que -3 es una cantidad que es tres unidades **menor** que 0 y -5 es una cantidad que es cinco unidades **menor** que 0.

De dos cantidades positivas, es mayor la de mayor valor absoluto; así, $+5$ es mayor que $+3$, mientras que **de dos cantidades negativas es mayor la de menor valor absoluto:** -3 es mayor que -5; -9 es menor que -4.

EJERCICIOS SOBRE CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

1) **Un hombre cobra $130. Paga una deuda de $80 y luego hace compras por valor de $95. ¿Cuánto tiene?**

Teniendo $130, pagó $80; luego, se quedó con $50. Después hace un gasto de $95 y como sólo tiene $50 incurre en una deuda de $45. Por lo tanto, tiene actualmente − $45. R.

EJERCICIO 1

1. Pedro debía 60 bolívares y recibió 320. Expresar su estado económico.
2. Un hombre que tenía 1170 sucres hizo una compra por valor de 1515. Expresar su estado económico.
3. Tenía $200. Cobré $56 y pagué deudas por $189. ¿Cuánto tengo?

4. Compro ropas por valor de 665 soles y alimentos por 1178. Si después recibo 2280, ¿cuál es mi estado económico?
5. Tenía $20. Pagué $15 que debía, después cobré $40 y luego hice gastos por $75. ¿Cuánto tengo?
6. Enrique hace una compra por $67; después recibe $72; luego hace otra compra por $16 y después recibe $2. Expresar su estado económico.
7. Después de recibir 200 colones hago tres gastos por 78, 81 y 93. Recibo entonces 41 y luego hago un nuevo gasto por 59. ¿Cuánto tengo?
8. Pedro tenía tres deudas de $45, $66 y $79 respectivamente. Entonces recibe $200 y hace un gasto de $10. ¿Cuánto tiene?

2) **A las 6 a. m. el termómetro marca $-4°$. A las 9 a. m. ha subido 7° y desde esta hora hasta las 5 p. m. ha bajado 11°. Expresar la temperatura a las 5 p. m.**

A las 6 a. m. marca $-4°$. Como a las 9 a. m. ha subido 7°, contamos siete divisiones de la escala desde $-4°$ hacia arriba y tendremos 3° sobre cero ($+3°$); como desde esta hora hasta las 5 p. m. ha bajado 11°, contando 11 divisiones de la escala desde $+3°$ hacia abajo llegaremos a $-8°$. Luego, a las 5 p. m. la temperatura es de $-8°$. R.

EJERCICIO 2

1. A las 9 a. m. el termómetro marca +12° y de esta hora a las 8 p. m. ha bajado 15°. Expresar la temperatura a las 8 p. m.
2. A las 6 a. m. el termómetro marca −3°. A las 10 a. m. la temperatura es 8° más alta y desde esta hora hasta las 9 p. m. ha bajado 6°. Expresar la temperatura a las 9 p. m.
3. A la 1 p. m. el termómetro marca +15° y a las 10 p. m. marca −3°. ¿Cuántos grados ha bajado la temperatura?
4. A las 3 a. m. el termómetro marca −8° y al mediodía +5°. ¿Cuántos grados ha subido la temperatura?
5. A las 8 a. m. el termómetro marca −4°; a las 9 a. m. ha subido 7°; a las 4 p. m. ha subido 2° más y a las 11 p. m. ha bajado 11°. Expresar la temperatura a las 11 p. m.
6. A las 6 a. m. el termómetro marca −8°. De las 6 a. m. a las 11 a. m. sube a razón de 4° por hora. Expresar la temperatura a las 7 a. m., a las 8 a. m. y a las 11 a. m.
7. A las 8 a. m. el termómetro marca −1°. De las 8 a. m. a las 11 a. m. baja a razón de 2° por hora y de 11 a. m. a 2 p. m. sube a razón de 3° por hora. Expresar la temperatura a las 10 a. m., a las 11 a. m., a las 12 a. m. y a las 2 p. m.
8. El día 10 de diciembre un barco se halla a 56° al oeste del primer meridiano. Del día 10 al 18 recorre 7° hacia el este. Expresar su longitud este día.
9. El día primero de febrero la situación de un barco es: 71° de longitud oeste y 15° de latitud sur. Del día primero al 26 ha recorrido 5° hacia el este y su latitud es entonces de 5° más al sur. Expresar su situación el día 26.

10. El día 5 de mayo la situación de un viajero es 18° de longitud este y 65° de latitud norte. Del día 5 al 31 ha recorrido 3° hacia el este y se ha acercado 4° al Ecuador. Expresar su situación el día 31.
11. Una ciudad fundada el año 75 A. C. fue destruida 135 años después. Expresar la fecha de su destrucción.

3) Un móvil recorre 40 m. en línea recta a la derecha de un punto A y luego retrocede en la misma dirección a razón de 15 m. por segundo. Expresar a qué distancia se halla del punto A al cabo del 1º, 2º, 3º y 4º segundo.

El móvil ha recorrido 40 m. a la derecha del punto A; luego, su posición es $+40$ m., tomando como positivo el sentido de izquierda a derecha.

Entonces empieza a moverse de la derecha hacia la izquierda (sentido negativo) a razón de 15 m. por segundo; luego, en el primer segundo se acerca 15 m. al punto A y como estaba a 40 m. de ese punto, se halla a $40-15=25$ m. a la derecha de A; luego, su posición es $+25$ m. R.

En el 2º segundo se acerca otros 15 m. al punto A; luego, se hallará a $25-15=10$ m. a la derecha de A; su posición ahora es $+10$ m. R.

En el 3er. segundo recorre otros 15 m. hacia A, y como estaba a 10 m. a la derecha de A, habrá llegado al punto A (con 10 m.) y recorrido 5 m. a la izquierda de A, es decir, $10-15=-5$ m. Su posición ahora es -5 m. R.

En el 4º segundo recorre otros 15 m. más hacia la izquierda y como ya estaba a 5 m. a la izquierda de A, se hallará al cabo del 4º segundo a 20 m. a la izquierda de A, o sea $-5-15=-20$ m.; luego, su posición ahora es -20 m. R.

EJERCICIO 3

(SENTIDO POSITIVO: DE IZQUIERDA A DERECHA Y DE ABAJO A ARRIBA).

1. Expresar que un móvil se halla a 32 m. a la derecha del punto A; a 16 m. a la izquierda de A.
2. Expresar que la parte de un poste que sobresale del suelo es 10 m. y tiene enterrados 4 m.
3. Después de caminar 50 m. a la derecha del punto A recorro 85 m. en sentido contrario. ¿A qué distancia me hallo ahora de A?
4. Si corro a la izquierda del punto B a razón de 6 m. por segundo, ¿a qué distancia de B me hallaré al cabo de 11 segs.?
5. Dos corredores parten del punto A en sentidos opuestos. El que corre hacia la izquierda de A va a 8 m. por seg. y el que corre hacia la derecha va a 9 m. por seg. Expresar sus distancias del punto A al cabo de 6 seg.
6. Partiendo de la línea de salida hacia la derecha un corredor da dos vueltas a una pista de 400 m. de longitud. Si yo parto del mismo punto y doy 3 vueltas a la pista en sentido contrario, ¿qué distancia hemos recorrido?
7. Un poste de 40 pies de longitud tenía 15 pies sobre el suelo. Días después se introdujeron 3 pies más. Expresar la parte que sobresale y la enterrada.

8. Un móvil recorre 55 m. a la derecha del punto A y luego en la misma dirección retrocede 52 m. ¿A qué distancia se halla de A?
9. Un móvil recorre 32 m. a la izquierda del punto A y luego retrocede en la misma dirección 15 m. ¿A qué distancia se halla de A?
10. Un móvil recorre 35 m. a la derecha de B y luego retrocede en la misma dirección 47 m. ¿A qué distancia se halla de B?
11. Un móvil recorre 39 m. a la izquierda de M y luego retrocede en la misma dirección 56 m. ¿A qué distancia se halla de M?
12. A partir del punto B una persona recorre 90 m. a la derecha y retrocede, en la misma dirección, primero 58 m. y luego 36 m. ¿A qué distancia se halla de B?
13. Un móvil recorre 72 m. a la derecha de A y entonces empieza a retroceder en la misma dirección, a razón de 30 m. por seg. Expresar su distancia del punto A al cabo del 1º, 2º, 3º y 4º seg.
14. Un auto recorre 120 Km. a la izquerda del punto M y luego retrocede a razón de 60 Km. por hora. ¿A qué distancia se halla del punto M al cabo de la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª hora?

14 VALOR ABSOLUTO Y RELATIVO

Valor absoluto de una cantidad es el número que representa la cantidad prescindiendo del **signo** o **sentido** de la cantidad, y **valor relativo** es el **sentido** de la cantidad, representado por el signo.

Así, el valor absoluto de $+\$8$ es \$8, y el valor relativo **haber**, expresado por el signo $+$; el valor absoluto de $-\$20$ es \$20, y el valor relativo **deuda**, expresado por el signo $-$.

Las cantidades $+7°$ y $-7°$ tienen el mismo valor absoluto, pero su valor relativo es opuesto, pues el primero expresa grados sobre cero y el segundo bajo cero; $-8°$ y $-11°$ tienen el mismo valor relativo (grados bajo cero) y distinto valor absoluto.

El valor absoluto de una cantidad algebraica cualquiera se representa colocando el número que corresponda a dicho valor entre dos líneas verticales. Así, el valor absoluto de $+8$ se representa $|8|$.

15 CANTIDADES ARITMETICAS Y ALGEBRAICAS

De lo expuesto anteriormente se deduce la diferencia entre cantidades **aritméticas** y **algebraicas**.

Cantidades aritméticas son las que expresan solamente el **valor absoluto** de las cantidades representado por los números, pero no nos dicen el **sentido** o **valor relativo** de las cantidades.

Así, cuando en Aritmética escribimos que una persona tiene \$5, tenemos solamente la idea del **valor absoluto** \$5 de esta cantidad, pero con esto no sabemos si la persona tiene \$5 de haber o de deuda. Escribiendo que el termómetro marca 8°, no sabemos si son sobre cero o bajo cero.

Cantidades algebraicas son las que expresan el valor absoluto de las cantidades y además su **sentido o valor relativo** por medio del **signo.**

Así, escribiendo que una persona tiene $+\$5$ expresamos el valor absoluto \$5 y el sentido o valor relativo (haber) expresado por el signo $+$; escribiendo $-\$8$ expresamos el valor absoluto \$8 y el sentido o valor relativo (deuda) expresado por el signo $-$; escribiendo que el termómetro marca $+8°$ tenemos el valor absoluto $8°$ y el valor relativo (sobre cero) expresado por el signo $+$, y escribiendo $-9°$ tenemos el valor absoluto $9°$ y el valor relativo (bajo cero) expresado por el signo $-$.

Los **signos** $+$ **y** $-$ tienen en Algebra **dos aplicaciones:** una, indicar las **operaciones de suma y resta,** y otra, indicar **el sentido o condición** de las cantidades.

Esta doble aplicación se distingue porque cuando los signos $+$ o $-$ tienen la significación de suma o resta, van entre términos o expresiones incluídas en paréntesis, como por ejemplo en $(+8)+(-4)$ y en $(-7)-(+6)$. Cuando van precediendo a un término, ya sea literal o numérico, expresan el sentido positivo o negativo, como por ejemplo en $-a$, $+b$, $+7$, -8

16 REPRESENTACION GRAFICA DE LA SERIE ALGEBRAICA DE LOS NUMEROS

Teniendo en cuenta que el 0 en Algebra es la ausencia de la cantidad, que las cantidades positivas son mayores que 0 y las negativas menores que 0, y que las distancias medidas hacia la derecha o hacia arriba de un punto se consideran positivas y hacia la izquierda o hacia abajo de un punto negativas, la serie algebraica de los números se puede representar de este modo:

$$\cdots\ -5\quad -4\quad -3\quad -2\quad -1\quad 0\quad +1\quad +2\quad +3\quad +4\quad +5\ \cdots$$

NOMENCLATURA ALGEBRAICA

17 EXPRESION ALGEBRAICA es la representación de un símbolo algebraico o de una o más operaciones algebraicas.

Ejemplos

$a,\ 5x,\ \sqrt{4a},\ (a+b)c,\ \dfrac{(5x-3y)a}{x^2}.$

18 TERMINO es una expresión algebraica que consta de un solo símbolo o de varios símbolos no separados entre sí por el signo $+$ o $-$. *Así,* a, $3b$, $2xy$, $\frac{4a}{3x}$ son términos.

Los **elementos de un término** son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado.

Por el **signo,** son **términos positivos** los que van precedidos del signo $+$ y **negativos** los que van precedidos del signo $-$. *Así,* $+a$, $+8x$, $+9ab$ son términos positivos y $-x$, $-5bc$ y $-\frac{3a}{2b}$ son términos negativos.

El signo $+$ suele omitirse delante de los términos positivos. *Así,* a equivale a $+a$; $3ab$ equivale a $+3ab$.

Por tanto, **cuando un término no va precedido de ningún signo es positivo.**

El **coeficiente,** como se dijo antes, es uno cualquiera, generalmente el primero, de los factores del término. *Así,* en el término $5a$ el coeficiente es 5; en $-3a^2x^3$ el coeficiente es -3.

La **parte literal** la constituyen las **letras** que haya en el término. *Así,* en $5xy$ la parte literal es xy; en $\frac{3x^3y^4}{2ab}$ la parte literal es $\frac{x^3y^4}{ab}$.

19 EL GRADO DE UN TERMINO puede ser de dos clases: **absoluto** y **con relación a una letra.**

Grado absoluto de un término es la **suma de los exponentes de sus factores literales.** *Así,* el término $4a$ es de primer grado porque el exponente del factor literal a es 1; el término ab es de **segundo grado** porque la suma de los exponentes de sus factores literales es $1+1=2$; el término a^2b es de **tercer grado** porque la suma de los exponentes de sus factores literales es $2+1=3$; $5a^4b^3c^2$ es de **noveno grado** porque la suma de los exponentes de sus factores literales es $4+3+2=9$.

El grado de un término con relación a una letra es el exponente de dicha letra. *Así* el término bx^3 es **de primer grado** con relación a b y **de tercer grado** con relación a x; $4x^2y^4$ es **de segundo grado** con relación a x y **de cuarto grado** con relación a y.

20 CLASES DE TERMINOS

Término entero es el que no tiene denominador literal como $5a$, $6a^4b^3$, $\frac{2a}{5}$.

Término fraccionario es el que tiene denominador literal como $\frac{3a}{b}$.

Término racional es el que no tiene radical, como los ejemplos anteriores, e **irracional** el que tiene radical, como $\sqrt{ab}$, $\frac{3b}{\sqrt{2a}}$.

Términos homogéneos son los que tienen el mismo grado absoluto. *Así,* $4x^4y$ y $6x^2y^3$ son homogéneos porque ambos son de quinto grado absoluto.

Términos heterogéneos son los de distinto grado absoluto, como $5a$, que es de primer grado, y $3a^2$, que es de segundo grado.

EJERCICIO 4

1. Dígase qué clase de términos son los siguientes atendiendo al signo, a si tienen o no denominador y a si tienen o no radical:

$$5a^2,\ -4a^3b,\ \frac{2a}{3},\ -\frac{5b^2}{6},\ \sqrt{a},\ -\sqrt[3]{5b^2},\ \frac{\sqrt{a}}{6},\ -\frac{4a^2b^3}{\sqrt{6a}}$$

2. Dígase el grado absoluto de los términos siguientes:

$$5a,\ -6a^2b,\ a^2b^2,\ -5a^3b^4c,\ 8x^5y^6,\ 4m^2n^3,\ -xyz^5$$

3. Dígase el grado de los términos siguientes respecto a cada uno de sus factores literales:

$$-a^3b^2,\ -5x^4y^3,\ 6a^2bx^3,\ -4abcy^2,\ 10m^2n^3b^4c^5$$

4. De los términos siguientes escoger cuatro que sean homogéneos y tres heterogéneos:

$$-4a^3b^2,\ 6ab^3,\ -x^5,\ 6x^4y,\ -2a^3x^4,\ -ab^5,\ 4abcx^2,\ -2ac$$

5. Escribir tres términos enteros; dos fraccionarios; dos positivos, enteros y racionales; tres negativos, fraccionarios e irracionales.
6. Escribir un término de cada uno de los grados absolutos siguientes: de tercer grado, de quinto grado, de undécimo grado, de décimo quinto grado, de vigésimo grado.
7. Escribir un término de dos factores literales que sea de cuarto grado con relación a la x; otro de cuatro factores literales que sea de séptimo grado con relación a la y; otro de cinco factores literales que sea de décimo grado con relación a la b.

CLASIFICACION DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

21 **MONOMIO** es una expresión algebraica que consta de un solo término, como $3a,\ -5b,\ \frac{x^2y}{4a^3}$.

22 **POLINOMIO** es una expresión algebraica que consta de más de un término, como $a+b$, $a+x-y$, x^3+2x^2+x+7.

Binomio es un polinomio que consta de dos términos, como: $a+b,\ x-y,\ \frac{a^2}{3}-\frac{5mx^4}{6b^2}$.

Trinomio es un polinomio que consta de tres términos, como $a+b+c,\ x^2-5x+6,\ 5x^2-6y^3+\frac{a^2}{3}$.

23 **EL GRADO** de un polinomio puede ser **absoluto** y **con relación a una letra.**

Grado absoluto de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Así, en el polinomio $x^4-5x^3+x^2-3x$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado, y el último, de primer grado; luego, el **grado absoluto del polinomio** es el cuarto.

Grado de un polinomio con relación a una letra es el mayor exponente de dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $a^6+a^4x^2-a^2x^4$ es de **sexto grado** con relación a la a y de **cuarto grado** con relación a la x.

EJERCICIO 5

1. Dígase el grado absoluto de los siguientes polinomios:
   a) x^3+x^2+x.
   b) $5a-3a^2+4a^4-6$.
   c) $a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4$.
   d) $x^5-6x^4y^3-4a^2b+x^2y^4-3y^6$.
2. Dígase el grado de los siguientes polinomios con relación a cada una de sus letras:
   a) $a^3+a^2-ab^3$.
   b) $x^4+4x^3-6x^2y^4-4xy^5$.
   c) $6a^4b^7-4a^2x+ab^9-5a^3b^8x^6$.
   d) $m^4n^2-mn^6+mx^4y^3-x^8+y^{15}-m^{11}$.

24 **CLASES DE POLINOMIOS**

Un polinomio es **entero** cuando ninguno de sus términos tiene denominador literal como x^2+5x-6; $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{5}$; **fraccionario** cuando alguno de sus términos tiene letras en el denominador como $\frac{a^2}{b}+\frac{b}{c}-8$; **racional** cuando no contiene radicales, como en los ejemplos anteriores; **irracional** cuando contiene radical, como $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}-\sqrt{abc}$; **homogéneo** cuando todos sus términos son del mismo grado absoluto, como $4a^3+5a^2b+6ab^2+b^3$, y **heterogéneo** cuando sus términos no son del mismo grado, como x^3+x^2+x-6.

Polinomio completo con relación a una letra es el que contiene todos los exponentes sucesivos de dicha letra, desde el más alto al más bajo que tenga dicha letra en el polinomio. Así, el polinomio $x^5+x^4-x^3+x^2-3x$ es completo respecto de la x, porque contiene todos los exponentes sucesivos de la x desde el más alto 5, hasta el más bajo 1, o sea 5, 4, 3, 2, 1; el polinomio $a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$ es completo respecto de a y b.

Polinomio ordenado con respecto a una letra es un polinomio en el cual los exponentes de una letra escogida, llamada **letra ordenatriz**, van aumentando o disminuyendo.

Así, el polinomio $x^4-4x^3+2x^2-5x+8$ está ordenado en orden **descendente** con relación a la letra ordenatriz x; el polinomio $a^5-2a^4b+6a^3b^2-5a^2b^3+3ab^4-b^5$ está ordenado en orden **descendente** respecto de la letra ordenatriz a y en orden **ascendente** respecto de la letra ordenatriz b.

25 **Ordenar un polinomio** es escribir sus términos de modo que los exponentes de una letra escogida como letra ordenatriz queden en orden descendente o ascendente. Así, ordenar el polinomio $-5x^3+x^5-3x+x^4-x^2+6$ en orden descendente con relación a x será escribir $x^5+x^4-5x^3-x^2-3x+6$.

Ordenar el polinomio $x^4y-7x^2y^3-5x^5+6xy^4+y^5-x^3y^2$ en orden ascendente con relación a x será escribirlo: $y^5+6xy^4-7x^2y^3-x^3y^2+x^4y-$

(26) **Término independiente de un polinomio con relación a una letra** es el término que no tiene dicha letra.

Así, en el polinomio a^3-a^2+3a-5 el término independiente con relación a la a es 5 porque no tiene a; en $x^4-6x^3+8x^2-9x+20$ el término independiente es 20; en $a^3-a^2b+3ab^2+b^3$ el término independiente con relación a la a es b^3, y el término independiente con relación a la b es a^3. El término independiente con relación a una letra puede considerarse que tiene esa letra con exponente cero, porque como se verá más adelante, toda cantidad elevada a cero equivale a 1.

Así, en el primer ejemplo anterior, -5 equivale a $-5a^0$, y en el último ejemplo, b^3 equivale a a^0b^3.

EJERCICIO 6

1. Atendiendo a si tienen o no denominador literal y a si tienen o no radical, dígase de qué clase son los polinomios siguientes:
   a) a^3+2a^2-3a. c) $\sqrt{a}+\sqrt{b}-2c+\sqrt{d}$.
   b) $\frac{a^4}{2}-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-a$. d) $4a+\frac{\sqrt{a}}{2}-6b+4$.
2. Escribir un polinomio de tercer grado absoluto; de quinto grado absoluto; de octavo grado absoluto; de décimoquinto grado absoluto.
3. Escribir un trinomio de segundo grado respecto de la x; un polinomio de quinto grado respecto de la a; un polinomio de noveno grado respecto de la m.
4. De los siguientes polinomios:
   a) $3a^2b+4a^3-5b^3$. d) $4a-5b+6c^2-8d^3-6$.
   b) $a^4-a^3b+a^2b^2+ab^3$. e) $y^5-ay^4+a^2y^3-a^3y^2-a^4y+y^5$.
   c) $x^5-bx^4+abx^3+ab^3x^2$. f) $-6a^3b^4-5a^6b+8a^2b^5-b^7$.
   escoger dos que sean homogéneos y dos heterogéneos.
5. De los siguientes polinomios:
   a) $a^4-a^2+a-a^3$. d) $m^5-m^4+m^3-m+5$.
   b) $5x^4-8x^2+x-6$. e) $y^5-by^4+b^2y^3-b^3y^2+b^4y$.
   c) $x^4y-x^3y^2+x^2y^3-y^4$.
   dígase cuáles son completos y respecto de cuáles letras.
6. Escribir tres polinomios homogéneos de tercer grado absoluto; cuatro de quinto grado absoluto; dos polinomios completos.
7. Ordenar los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden descendente:
   a) $m^2+6m-m^3+m^4$.
   b) $6ax^2-5a^3+2a^2x+x^3$.
   c) $-a^2b^3+a^4b+a^3b^2-ab^4$.
   d) $a^4-5a+6a^3-9a^2+6$.
   e) $-x^8y^2+x^{10}+3x^4y^6-x^6y^4+x^2y^8$.
   f) $-3m^{15}n^2+4m^{12}n^3-8m^6n^5-10m^3n^6+n^7-7m^9n^4+m^{18}n$.
8. Ordenar los siguientes polinomios respecto de cualquier letra en orden ascendente:
   a) a^2-5a^3+6a. d) $a^2b^4+a^4b^3-a^6b^2+a^8b+b^5$.
   b) $x-5x^3+6x^2+9x^4$. e) $y^{12}-x^9y^6+x^{12}y^4-x^3y^{10}$.
   c) $2y^4+4y^5-6y+2y^2+5y^3$.

(27) TERMINOS SEMEJANTES

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, o sea, cuando tienen iguales letras afectadas de iguales exponentes.

Ejemplos

$2a$ y a; $-2b$ y $8b$; $-5a^3b^2$ y $-8a^3b^2$; x^{m+1} y $3x^{m+1}$.

Los términos $4ab$ y $-6a^2b$ no son semejantes, porque aunque tienen iguales letras, éstas no tienen los mismos exponentes, ya que la a del primero tiene de exponente 1 y la a del segundo tiene de exponente 2.

Los términos $-bx^4$ y ab^4 no son semejantes, porque aunque tienen los mismos exponentes, las letras no son iguales.

(28) **REDUCCION DE TERMINOS SEMEJANTES** es una operación que tiene por objeto convertir en un solo término dos o más términos semejantes.

En la reducción de términos semejantes pueden ocurrir los tres casos siguientes:

1) **Reducción de dos o más términos semejantes del mismo signo.**

REGLA

Se suman los coeficientes, poniendo delante de esta suma el mismo signo que tienen todos y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos

(1) $3a+2a=5a$. R.
(2) $-5b-7b=-12b$. R.
(3) $-a^2-9a^2=-10a^2$. R.
(4) $3a^{x-2}+5a^{x-2}=8a^{x-2}$. R.
(5) $-4a^{m+1}-7a^{m+1}=-11a^{m+1}$. R.
(6) $\frac{1}{2}ab+\frac{2}{3}ab=\frac{7}{6}ab$. R.
(7) $-\frac{1}{3}xy-\frac{2}{3}xy=-xy$. R.
(8) $5x+x+2x=8x$. R.
(9) $-m-3m-6m-5m=-15m$
(10) $\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{4}x^2y+\frac{1}{8}x^2y=\frac{7}{8}x^2y$. R.

EJERCICIO 7

Reducir:

1. $x+2x$.
2. $8a+9a$.
3. $11b+9b$.
4. $-b-5b$.
5. $-8m-m$.
6. $-9m-7m$.
7. $4a^x+5a^x$.
8. $6a^{x+1}+8a^{x+1}$.
9. $-m^{x+1}-5m^{x+1}$.
10. $-3a^{x-2}-a^{x-2}$.
11. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$.
12. $\frac{3}{5}ab+\frac{1}{10}ab$.
13. $\frac{1}{3}xy+\frac{1}{6}xy$.
14. $-\frac{1}{5}xy-\frac{4}{5}$
15. $-\frac{5}{6}a^2b-\frac{1}{8}$
16. $-a-\frac{7}{8}a$.

17. $8a+9a+6a.$
18. $15x+20x+x.$
19. $-7m-8m-9m.$
20. $-a^2b-a^2b-3a^2b.$
21. $a^x+3a^x+8a^x.$
22. $-5a^{x+1}-3a^{x+1}-5a^{x+1}.$
23. $a+\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}a.$
24. $-x-\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}x.$
25. $\frac{1}{5}ax+\frac{3}{10}ax+ax.$
26. $-\frac{3}{4}a^2x-\frac{5}{6}a^2x-a^2x.$
27. $11a+8a+9a+11a.$
28. $m^{x+1}+3m^{x+1}+4m^{x+1}+6m^{x+1}.$
29. $-x^2y-8x^2y-9x^2y-20x^2y.$
30. $-3a^m-5a^m-6a^m-9a^m.$
31. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a+a.$
32. $\frac{3}{5}ax+\frac{1}{2}ax+\frac{1}{10}ax+\frac{1}{20}ax.$
33. $0.5m+0.6m+0.7m+0.8m.$
34. $-\frac{1}{7}ab-\frac{1}{14}ab-\frac{1}{28}ab-ab.$
35. $-\frac{2}{3}x^3y-\frac{1}{6}x^3y-\frac{1}{9}x^3y-\frac{1}{12}x^3y.$
36. $ab^2+ab^2+7ab^2+9ab^2+21ab^2.$
37. $-m-m-8m-7m-3m.$
38. $-x^{a+1}-8x^{a+1}-4x^{a+1}-5x^{a+1}-x^{a+1}.$
39. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{5}a+\frac{1}{6}a.$
40. $-\frac{1}{3}ab-\frac{1}{6}ab-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{12}ab-\frac{1}{9}ab.$

2) Reducción de dos términos semejantes de distinto signo.

REGLA

Se restan los coeficientes, poniendo delante de esta diferencia el signo del mayor y a continuación se escribe la parte literal.

Ejemplos

(1) $2a-3a=-a.$ R.

(2) $18x-11x=7x.$ R.

(3) $-20ab+11ab=-9ab.$ R.

(4) $-8a^x+13a^x=5a^x.$ R.

(5) $25a^{x+1}-54a^{x+1}=-29a^{x+1}.$ R.

(6) $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}a=-\frac{1}{6}a.$ R.

(7) $-\frac{3}{7}a^2b+a^2b=\frac{4}{7}a^2b.$ R.

(8) $-\frac{5}{6}a^{x+1}+\frac{3}{4}a^{x+1}=-\frac{1}{12}a^{x+1}.$ R.

De la regla anterior se deduce que dos términos semejantes de iguales coeficientes y de signo contrario se anulan.

Así: $-8ab+8ab=0.$ R.

$\frac{2}{5}x^2y-\frac{2}{5}x^2y=0.$ R.

EJERCICIO 8

Reducir:

1. $8a-6a.$
2. $6a-8a.$
3. $9ab-15ab.$
4. $15ab-9ab.$
5. $2a-2a.$
6. $-7b+7b.$
7. $-14xy+32xy.$
8. $-25x^2y+32x^2y.$
9. $40x^3y-51x^3y.$
10. $-m^2n+6m^2n.$
11. $-15xy+40xy.$
12. $55a^3b^2-81a^3b^2.$

13. $-x^2y+x^2y.$
14. $-9ab^2+9ab^2.$
15. $7x^2y-7x^2y.$
16. $-101mn+118mn.$
17. $502ab-405ab.$
18. $-1024x+1018x.$
19. $-15ab+15ab.$
20. $\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}a.$
21. $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}a.$
22. $\frac{5}{6}a^2b-\frac{5}{12}a^2b.$
23. $-\frac{4}{7}x^2y+\frac{9}{14}x^2y.$
24. $\frac{3}{8}am-\frac{5}{4}am.$
25. $-am+\frac{3}{5}am.$
26. $\frac{5}{6}mn-\frac{7}{8}mn.$
27. $-a^2b+\frac{3}{11}a^2b.$
28. $3.4a^4b^3-5.6a^4b^3.$
29. $-1.2yz+3.4yz.$
30. $4a^x-2a^x.$
31. $-8a^{x+1}+8a^{x+1}.$
32. $25m^{a-1}-32m^{a-1}.$
33. $-x^{a+1}+x^{a+1}.$
34. $-\frac{1}{4}a^{m-2}+\frac{1}{2}a^{m-2}.$
35. $\frac{5}{6}a^{m+1}-\frac{7}{12}a^{m+1}.$
36. $4a^2-\frac{1}{3}a^2.$
37. $-5mn+\frac{3}{4}mn.$
38. $8a^{x+2}b^{x+3}-25a^{x+2}b^{x+3}.$
39. $-\frac{7}{8}a^mb^n+a^mb^n.$
40. $0.85mxy-\frac{1}{2}mxy.$

3) Reducción de más de dos términos semejantes de signos distintos.

REGLA

Se reducen a un solo término todos los positivos, se reducen a un solo término todos los negativos y a los dos resultados obtenidos se aplica la regla del caso anterior.

Ejemplos

(1) Reducir $5a-8a+a-6a+21a.$

Reduciendo los positivos: $5a+a+21a=27a.$

Reduciendo los negativos: $-8a-6a=-14a.$

Aplicando a estos resultados obtenidos, $27a$ y $-14a$, la regla del caso anterior, se tiene: $27a-14a=13a.$ R.

Esta reducción también suele hacerse **término a término,** de esta manera:

$5a-8a=-3a;\ -3a+a=-2a;\ -2a-6a=-8a;\ -8a+21a=13a.$ R.

(2) Reducir $-\frac{2}{5}bx^2+\frac{1}{5}bx^2+\frac{3}{4}bx^2-4bx^2+bx^2.$

Reduciendo los positivos: $\frac{1}{5}bx^2+\frac{3}{4}bx^2+bx^2=\frac{39}{20}bx^2.$

Reduciendo los negativos: $-\frac{2}{5}bx^2-4bx^2=-\frac{22}{5}bx^2.$

Tendremos: $\frac{39}{20}bx^2-\frac{22}{5}bx^2=-\frac{49}{20}bx^2.$ R.

EJERCICIO 9

Reducir:

1. $9a-3a+5a.$
2. $-8x+9x-x.$
3. $12mn-23mn-5mn.$
4. $-x+19x-18x.$
5. $19m-10m+6m.$
6. $-11ab-15ab+26ab.$
7. $-5a^x+9a^x-35a^x.$
8. $-24a^{x+2}-15a^{x+2}+39a^{x+2}.$
9. $\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}y-y.$
10. $-\frac{3}{5}m+\frac{1}{4}m-$

11. $\frac{3}{8}a^2b+\frac{1}{4}a^2b-a^2b.$
12. $-a+8a+9a-15a.$
13. $7ab-11ab+20ab-31ab.$
14. $25x^2-50x^2+11x^2+14x^2.$
15. $-xy-8xy-19xy+40xy.$
16. $7ab+21ab-ab-80ab.$
17. $-25xy^2+11xy^2+60xy^2-82xy^2.$
18. $-72ax+87ax-101ax+243ax.$
19. $-82bx-71bx-53bx+206bx.$
20. $105a^3-464a^3+58a^3+301a^3.$
21. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x.$
22. $\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}y-\frac{1}{12}y.$
23. $\frac{3}{5}a^2b-\frac{1}{6}a^2b+\frac{1}{3}a^2b-a^2b.$
24. $-\frac{5}{6}ab^2-\frac{1}{6}ab^2+ab^2-\frac{5}{8}ab^2.$
25. $-a+8a-11a+15a-75a.$
26. $-7c+21c+14c-30c+82c.$
27. $-mn+14mn-31mn-mn+20mn.$
28. $a^2y-7a^2y-93a^2y+51a^2y+48a^2y.$
29. $-a+a-a+a-3a+6a.$
30. $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x-\frac{7}{6}x+\frac{1}{2}x-x.$
31. $-2x+\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}x+x-\frac{5}{6}x.$
32. $7a^x-30a^x-41a^x-9a^x+73a^x.$
33. $-a^{x+1}+7a^{x+1}-11a^{x+1}-20a^{x+1}+26a^{x+1}.$
34. $a+6a-20a+150a-80a+31a.$
35. $-9b-11b-17b-81b-b+110b.$
36. $-a^2b+15a^2b+a^2b-85a^2b-131a^2b+39a^2b.$
37. $84m^2x-501m^2x-604m^2x-715m^2x+231m^2x+165m^2x.$
38. $\frac{5}{6}a^3b^2+\frac{2}{3}a^3b^2-\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{5}{8}a^3b^2+4a^3b^2.$
39. $40a-81a+130a+41a-83a-91a+16a.$
40. $-21ab+52ab-60ab+84ab-31ab-ab-23ab.$

29 REDUCCION DE UN POLINOMIO QUE CONTENGA TERMINOS SEMEJANTES DE DIVERSAS CLASES

Ejemplos

(1) Reducir el polinomio $5a-6b+8c+9a-20c-b+6b-c.$

Se reducen por separado los de cada clase:

$$5a+9a=14a.$$
$$-6b-b+6b=-b.$$
$$8c-20c-c=-13c.$$

Tendremos: $14a-b-13c.$ R.

(2) Reducir el polinomio:

$8a^3b^2+4a^4b^3+6a^3b^2-a^3b^2-9a^4b^3-15-5ab^5+8-6ab^5.$

Se reducen por separado los de cada clase:

$$4a^4b^3-9a^4b^3=-5a^4b^3.$$
$$8a^3b^2+6a^3b^2-a^3b^2=13a^3b^2.$$
$$-5ab^5-6ab^5=-11ab^5.$$
$$-15+8=-7.$$

Tendremos: $-5a^4b^3+13a^3b^2-11ab^5-7.$ R.

(3) Reducir el polinomio:

$\frac{2}{5}x^4-\frac{1}{2}x^3y+3x^4-y^4+\frac{5}{6}y^4-0.3x^4-\frac{3}{5}x^3y-6+x^3y-14+2\frac{1}{3}y^4.$

Tendremos: $\frac{2}{5}x^4+3x^4-0.3x^4=3\frac{1}{10}x^4.$

$$x^3y-\frac{1}{2}x^3y-\frac{3}{5}x^3y=-\frac{1}{10}x^3y.$$
$$2\frac{1}{3}y^4+\frac{5}{6}y^4-y^4=2\frac{1}{6}y^4.$$
$$-6-14=-20.$$

$3\frac{1}{10}x^4-\frac{1}{10}x^3y+2\frac{1}{6}y^4-20.$ R.

EJERCICIO 10

Reducir los polinomios siguientes:

1. $7a-9b+6a-4b.$
2. $a+b-c-b-c+2c-a.$
3. $5x-11y-9+20x-1-y.$
4. $-6m+8n+5-m-n-6m-11.$
5. $-a+b+2b-2c+3a+2c-3b.$
6. $-81x+19y-30z+6y+80x+x-25y.$
7. $15a^2-6ab-8a^2+20-5ab-31+a^2-ab.$
8. $-3a+4b-6a+81b-114b+31a-a-b.$
9. $-71a^3b-84a^4b^2+50a^3b+84a^4b^2-45a^3b+18a^3b.$
10. $-a+b-c+8+2a+2b-19-2c-3a-3-3b+3c.$
11. $m^2+71mn-14m^2-65mn+m^3-m^2-115m^2+6m^3.$
12. $x^4y-x^3y^2+x^2y-8x^4y-x^2y-10+x^3y^2-7x^3y^2-9+21x^4y-y^3+50.$
13. $5a^{x+1}-3b^{x+2}-8c^{x+3}-5a^{x+1}-50+4b^{x+2}-65-b^{x+2}+90+c^{x+3}+7c^{x+3}.$
14. $a^{m+2}-x^{m+3}-5+8-3a^{m+2}+5x^{m+3}-6+a^{m+2}-5x^{m+3}.$
15. $0.3a+0.4b+0.5c-0.6a-0.7b-0.9c+3a-3b-3c.$
16. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+2a-3b-\frac{3}{4}a-\frac{1}{6}b+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}.$
17. $\frac{3}{5}m^2-2mn+\frac{1}{10}m^2-\frac{1}{3}mn+2mn-2m^2.$
18. $-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{5}{6}b^2+2\frac{1}{3}a^2-\frac{3}{4}ab+\frac{1}{6}b^2-\frac{1}{3}b^2-2ab.$
19. $0.4x^2y+31+\frac{3}{8}xy^2-0.6y^3-\frac{2}{5}x^2y-0.2xy^2+\frac{1}{4}y^3-6.$
20. $\frac{3}{25}a^{m-1}-\frac{7}{50}b^{m-2}+\frac{3}{5}a^{m-1}-\frac{1}{25}b^{m-2}-0.2a^{m-1}+\frac{1}{5}b^{m-2}.$

VALOR NUMERICO

Valor numérico de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir las letras por valores numéricos dados y efectuar después las operaciones indicadas.

30 VALOR NUMERICO DE EXPRESIONES SIMPLES

Ejemplos

(1) Hallar el valor numérico de $5ab$ para $a=1$, $b=2$.
Sustituimos la a por su valor 1, y la b por 2, y tendremos:

$$5ab = 5\times1\times2 = 10. \quad \text{R.}$$

(2) Valor numérico de $a^2b^3c^4$ para $a=2$, $b=3$, $c=\frac{1}{2}$.

$$a^2b^3c^4 = 2^2\times3^3\times(\tfrac{1}{2})^4 = 4\times27\times\tfrac{1}{16} = \tfrac{27}{4} = 6\tfrac{3}{4}. \quad \text{R.}$$

(3) Valor numérico de $3ac\sqrt{2ab}$ para $a=2$, $b=9$, $c=\frac{1}{3}$.

$$3ac\sqrt{2ab} = 3\times2\times\tfrac{1}{3}\times\sqrt{2\times2\times9} = 2\times\sqrt{36} = 2\times6 = 12. \quad \text{R.}$$

(4) Valor numérico de $\frac{4a^2b^3}{5cd}$ para $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{3}$, $c=2$, $d=3$.

$$\frac{4a^2b^3}{5cd} = \frac{4\times(\frac{1}{2})^2\times(\frac{1}{3})^3}{5\times2\times3} = \frac{4\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{27}}{30} = \frac{1/27}{30} = \frac{1}{810}. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 11

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a=1,\quad b=2,\quad c=3,\quad m=\tfrac{1}{2},\quad n=\tfrac{1}{3},\quad p=\tfrac{1}{4}.$$

1. $3ab$.
2. $5a^2b^3c$.
3. b^2mn.
4. $24m^2n^3p$.
5. $\frac{2}{3}a^4b^2m^3$.
6. $\frac{7}{12}c^3p^2m$.
7. $m^bn^cp^a$.
8. $\frac{5}{6}a^{b-1}m^{c-2}$.
9. $\sqrt{2bc^2}$.
10. $4m\sqrt[3]{12bc^2}$.
11. $mn\sqrt{8a^4b^3}$.
12. $\frac{4a}{3bc}$.
13. $\frac{5b^2m^2}{np}$.
14. $\frac{\frac{4}{5}b^3}{\frac{3}{5}c^2}$.
15. $\frac{2m}{\sqrt{n^2}}$.
16. $\frac{24mn}{2\sqrt{n^2p^2}}$.
17. $\frac{3\sqrt[3]{64b^3c^6}}{2m}$.
18. $\frac{\frac{2}{3}\sqrt{apb^2}}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{125bm}}$.

31 VALOR NUMERICO DE EXPRESIONES COMPUESTAS

Ejemplos

(1) Hallar el valor numérico de $a^2-5ab+3b^3$ para $a=3$, $b=4$.

$$a^2-5ab+3b^3 = 3^2-5\times3\times4+3\times4^3 = 9-60+192 = 141. \quad \text{R.}$$

(2) Valor numérico de $\frac{3a^2}{4}-\frac{5ab}{x}+\frac{b}{ax}$ para $a=2$, $b=\frac{1}{3}$, $x=\frac{1}{6}$.

$$\frac{3a^2}{4}-\frac{5ab}{x}+\frac{b}{ax} = \frac{3\times2^2}{4}-\frac{5\times2\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}+\frac{\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{6}} = 3-\frac{\frac{10}{3}}{\frac{1}{6}}+\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$$= 3-20+1 = -16. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 12

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a=3,\quad b=4,\quad c=\tfrac{1}{3},\quad d=\tfrac{1}{2},\quad m=6,\quad n=\tfrac{1}{4}.$$

1. $a^2-2ab+b^2$.
2. $c^2+2cd+d^2$.
3. $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$.
4. $\frac{c}{d}-\frac{m}{n}+2$.
5. $\frac{a^2}{3}-\frac{b^2}{2}+\frac{m^2}{6}$.
6. $\frac{3}{5}c-\frac{1}{2}b+2d$.
7. $\frac{ab}{n}+\frac{ac}{d}-\frac{bd}{m}$.
8. $\sqrt{b}+\sqrt{n}+\sqrt{6m}$.
9. $c\sqrt{3a}-d\sqrt{16b^2}+n\sqrt{8d}$.
10. $\frac{m^a}{d^b}$.
11. $\frac{3c^2}{4}+\frac{4n^2}{m}$.
12. $\frac{4d^2}{2}+\frac{16n^2}{2}-1$.
13. $\frac{a+b}{c}-\frac{b+m}{d}$.
14. $\frac{b-a}{n}+\frac{m-b}{d}+5a$.
15. $\frac{12c-a}{2b}-\frac{16n-a}{m}+\frac{1}{d}$.
16. $\sqrt{4b}+\frac{\sqrt{3a}}{3}-\frac{\sqrt{6m}}{6}$.
17. $\frac{\sqrt{b}+\sqrt{2d}}{2}-\frac{\sqrt{3c}+\sqrt{8d}}{4}$.
18. $\frac{2\sqrt{a^2b^2}}{3}+\frac{3\sqrt{2+d^2}}{4}-a\sqrt{}$

(3) Valor numérico de $2(2a-b)(x^2+y)-(a^2+b)(b-a)$ para

$$a=2,\ b=3,\ x=4,\ y=\tfrac{1}{2}.$$

Las operaciones indicadas dentro de los paréntesis deben efectuarse antes que ninguna otra, así:

$$2(2a-b) = 2\times(2\times2-3) = 2\times(4-3) = 2\times1$$
$$x^2+y = 4^2+\tfrac{1}{2} = 16+\tfrac{1}{2} = 16\tfrac{1}{2}$$
$$a^2+b = 2^2+3 = 4+3 = 7$$
$$b-a = 3-2 = 1$$

Tendremos:

$$2(2a-b)(x^2+y)-(a^2+b)(b-a) = 2\times16\tfrac{1}{2}-7\times1 = 2\times\tfrac{33}{2}-7 = 33-7 = 26$$

EJERCICIO 13

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a=1,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=4,\quad m=\tfrac{1}{2},\quad n=\tfrac{2}{3},\quad p=\tfrac{1}{4},\quad x=0.$$

1. $(a+b)c-d$.
2. $(a+b)(b-a)$.
3. $(b-m)(c-n)+4a^2$.
4. $(2m+3n)(4p+b^2)$.
5. $(4m+8p)(a^2+b^2)(6n-d)$.
6. $(c-b)(d-c)(b-a)(m-p)$.
7. $b^2(c+d)-a^2(m+n)+2x$.
8. $2mx+6(b^2+c^2)-4d^2$.
9. $\left(\frac{8m}{9n}+\frac{16p}{b}\right)a$.
10. $x+m(a^b+d^c-c^a)$.
11. $\frac{4(m+p)}{a}+\frac{a^2+b^2}{c^2}$

$(2m+3n+4p)(8p+6n-4m)(9n+20p).$

$c^2(m+n)-d^2(m+p)+b^2(n+p).$

$\left(\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{a}+\frac{2}{\sqrt{d}}\right)m.$

$(4p+2b)(18n-24p)+2(8m+2)(40p+a).$

$\frac{a+\frac{d}{b}}{d-b}\times\frac{5+\frac{2}{m^2}}{p^2}.$

$(a+b)\sqrt{c^2+8b}-m\sqrt{n^2}.$

$\left(\frac{\sqrt{a+c}}{2}+\frac{\sqrt{6n}}{b}\right)\div(c+d)\sqrt{p}.$

19. $3(c-b)\sqrt{32m}-2(d-a)\sqrt{16p}-\frac{2}{n}.$

20. $\frac{\sqrt{6abc}}{2\sqrt{8b}}+\frac{\sqrt{3mn}}{2(b-a)}-\frac{cdnp}{abc}.$

21. $\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}+3(a+b)(2a+3b)$

22. $b^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^2$

23. $(2m+3n)(4p+2c)-4m^2n^2.$

24. $\frac{b^2-\frac{c}{3}}{2ab-m}-\frac{n}{b-m}.$

(32) EJERCICIOS SOBRE NOTACION ALGEBRAICA

Con las cantidades algebraicas, representadas por letras, pueden hacerse las mismas operaciones que con los números aritméticos. Como la representación de cantidades por medio de símbolos o letras suele ofrecer dificultades a los alumnos, ofrecemos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplos

(1) Escríbase la suma del cuadrado de a con el cubo de b.

a^2+b^3. R.

(2) Un hombre tenía $\$a$; después recibió $\$8$ y después pagó una cuenta de $\$c$. ¿Cuánto le queda?

Teniendo $\$a$ recibió $\$8$ luego tenía $\$(a+8)$. Si entonces gasta $\$c$ le quedan $\$(a+8-c)$. R.

(3) Compré 3 libros a $\$a$ cada uno; 6 sombreros a $\$b$ cada uno y m trajes a $\$x$ cada uno. ¿Cuánto he gastado?

3 libros a $\$a$ importan $\$3a$.
6 sombreros a $\$b$ importan $\$6b$.
m trajes a $\$x$ importan $\$mx$.

Luego el gasto total ha sido de $\$(3a+6b+mx)$. R.

(4) Compro x libros iguales por $\$m$. ¿Cuánto me ha costado cada uno?

Cada libro ha costado $\$\frac{m}{x}$. R.

(5) Tenía $\$9$ y gasté $\$x$. ¿Cuánto me queda?

Me quedan $\$(9-x)$. R.

EJERCICIO 14

1. Escríbase la suma de a, b y m.
2. Escríbase la suma del cuadrado de m, el cubo de b y la cuarta potencia de x.

3. Siendo a un número entero, escríbanse los dos números enteros consecutivos posteriores a a.
4. Siendo x un número entero, escríbanse los dos números consecutivos anteriores a x.
5. Siendo y un número entero par, escríbanse los tres números pares consecutivos posteriores a y.
6. Pedro tenía $\$a$, cobró $\$x$ y le regalaron $\$m$. ¿Cuánto tiene Pedro?
7. Escríbase la diferencia entre m y n.
8. Debía x bolívares y pagué 6. ¿Cuánto debo ahora?
9. De una jornada de x Km. ya se han recorrido m Km. ¿Cuánto falta por andar?
10. Recibo $\$x$ y después $\$a$. Si gasto $\$m$, ¿cuánto me queda?
11. Tengo que recorrer m Km. El lunes ando a Km., el martes b Km. y el miércoles c Km. ¿Cuánto me falta por andar?
12. Al vender una casa en $\$n$ gano $\$300$. ¿Cuánto me costó la casa?
13. Si han transcurrido x días de un año, ¿cuántos días faltan por transcurrir?
14. Si un sombrero cuesta $\$a$, ¿cuánto importarán 8 sombreros; 15 sombreros; m sombreros?
15. Escríbase la suma del duplo de a con el triplo de b y la mitad de c.
16. Expresar la superficie de una sala rectangular que mide a m. de largo y b m. de ancho.
17. Una extensión rectangular de 23 m. de largo mide n m. de ancho. Expresar su superficie.
18. ¿Cuál será la superficie de un cuadrado de x m. de lado?
19. Si un sombrero cuesta $\$a$ y un traje $\$b$, ¿cuánto importarán 3 sombreros y 6 trajes?, ¿x sombreros y m trajes?
20. Escríbase el producto de $a+b$ por $x+y$.
21. Vendo $(x+6)$ trajes a $\$8$ cada uno. ¿Cuánto importa la venta?
22. Compro $(a-8)$ caballos a $(x+4)$ bolívares cada uno. ¿Cuánto importa la compra?
23. Si x lápices cuestan 75 sucres; ¿cuánto cuesta un lápiz?
24. Si por $\$a$ compro m kilos de azúcar, ¿cuánto importa un kilo?
25. Se compran $(n-1)$ caballos por 3000 colones. ¿Cuánto importa cada caballo?
26. Compré a sombreros por x soles. ¿A cómo habría salido cada sombrero si hubiera comprado 3 menos por el mismo precio?
27. La superficie de un campo rectangular es m m.^{2} y el largo mide 14 m. Expresar el ancho.
28. Si un tren ha recorrido $x+1$ Km. en a horas, ¿cuál es su velocidad por hora?
29. Tenía $\$a$ y cobré $\$b$. Si el dinero que tengo lo empleo todo en comprar $(m-2)$ libros, ¿a cómo sale cada libro?
30. En el piso bajo de un hotel hay x habitaciones. En el segundo piso hay doble número de habitaciones que en el primero; en el tercero la mitad de las que hay en el primero. ¿Cuántas habitaciones tiene el hotel?
31. Pedro tiene a sucres; Juan tiene la tercera parte de lo de Pedro; Enrique la cuarta parte del duplo de lo de Pedro. La suma de lo que tienen los tres es menor que 1000 sucres. ¿Cuánto falta a esta suma para ser igual a 1000 sucres?

NOTAS SOBRE EL CONCEPTO DE NUMERO

El concepto de número natural (véase Aritmética Teórico-Práctica, 33), que satisface las exigencias de la Aritmética elemental no responde a la generalización y abstracción características de la operatoria algebraica.

En Algebra se desarrolla un cálculo de validez general aplicable a cualquier tipo especial de número. Conviene pues, considerar cómo se ha ampliado el campo de los números por la introducción de nuevos entes, que satisfacen las leyes que regulan las operaciones fundamentales, ya que, como veremos más adelante, el número natural (1) no nos sirve para efectuar la resta y la división en todos los casos. Baste por el momento, dado el nivel matemático que alcanzaremos a lo largo de este texto, explicar cómo se ha llegado al concepto de número real.

Para hacer más comprensible la ampliación del campo de los números, adoptaremos un doble criterio. Por un lado, un criterio histórico que nos haga conocer la gradual aparición de las distintas clases de números; por otro, un criterio intuitivo que nos ponga de manifiesto cómo ciertas necesidades materiales han obligado a los matemáticos a introducir nuevos entes numéricos. Este doble criterio, justificable por la índole didáctica de este libro, permitirá al principiante alcanzar una comprensión clara del concepto formal (abstracto) de los números reales.

EL NUMERO ENTERO Y EL NUMERO FRACCIONARIO

Mucho antes de que los griegos (Eudoxio, Euclides, Apolonio, etc.) realizaran la sistematización de los conocimientos matemáticos, los babilonios (según muestran las tablillas cuneiformes que datan de 2000-1800 A.C.) y los egipcios (como se ve en el papiro de Rhind) conocían las fracciones.

La necesidad de medir magnitudes continuas tales como la longitud, el volumen, el peso, etc., llevó al hombre a introducir los números fraccionarios.

Cuando tomamos una unidad cualquiera, por ejemplo, la vara, para medir una magnitud continua (magnitud escalar o lineal), puede ocurrir una de estas dos cosas: que la unidad esté contenida un número entero de veces, o que no esté contenida un número entero de veces. (2) En el primer caso, representamos el resultado de la medición con un número entero. En el segundo caso, tendremos que fraccionar la unidad elegida en dos, en tres, o en cuatro partes iguales; de este modo, hallaremos una fracción de la unidad que esté contenida en la magnitud que tratamos de medir. El resultado de esta última medición lo expresamos con un par de números enteros, distintos de cero, llamados respectivamente numerador y denominador. El denominador nos dará el número de partes en que hemos dividido la unidad, y el numerador, el número de subunidades contenidas en la magnitud que acabamos de medir. Surgen de este modo los números fraccionarios. Son números fraccionarios 1/2, 1/3, 3/5, etc.

(1) P. L. G. Dirichlet (alemán, 1805-1859), ha sostenido que no es necesariamente indispensable ampliar el concepto de número natural, ya que —según él— cualquier principio de la más alta matemática puede demostrarse por medio de los números naturales.

(2) En la práctica y hablando con rigor, ninguna medida resulta exacta, en razón de lo imperfecto de nuestros instrumentos de medida y de nuestros sentidos.

Podemos decir también, que son números fraccionarios los que nos permiten expresar el cociente de una división inexacta, o lo que es lo mismo, una división en la cual el dividendo no es múltiplo del divisor.

Como se ve, en oposición a los números fraccionarios tenemos los números enteros, que podemos definir como aquellos que expresan el cociente de una división exacta, como por ejemplo, 1, 2, 3, etc.

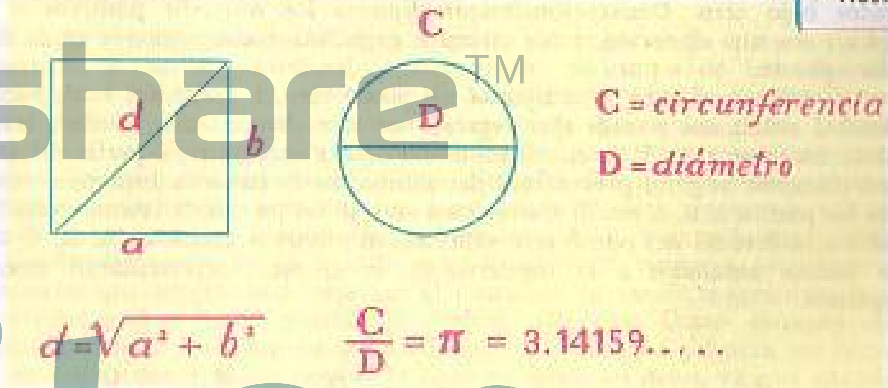
$\begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ \hline 0 & 1 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$ $\quad$ $6 \div 2 = 3.$

EL NUMERO RACIONAL Y EL NUMERO IRRACIONAL

Siguiendo el orden histórico que nos hemos trazado, vamos a ver ahora cuándo y cómo surgieron los números **irracionales**.

Es indudable que fueron los griegos quienes conocieron primero los números irracionales. Los historiadores de la matemática, están de acuerdo en atribuir a Pitágoras de Samos (540 A.C.), el descubrimiento de estos números, al establecer la relación entre el lado de un cuadrado y la diagonal del mismo. Más tarde, Teodoro de Cirene (400 A.C.), matemático de la escuela pitagórica, demostró geométricamente que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, etc., son irracionales. Euclides (300 A.C.), estudió en el Libro X de sus "Elementos", ciertas magnitudes que al ser medidas no encontramos ningún número entero ni fraccionario que las exprese. Estas magnitudes se llaman inconmensurables, y los números que se originan al medir tales magnitudes se llaman irracionales. (3) Ejemplos de tales magnitudes son la relación del lado de un cuadrado con la diagonal del mismo, que se expresa con el número irracional $\sqrt{a^2+b^2}$; y la relación de la circunferencia, al diámetro que se expresa con la letra $\pi = 3.141592\ldots$

FIGURA 1



(3) Al exponer sistemáticamente los números irracionales, Euclides los llamó asymmetros, y a los racionales los llamó symmetros, palabras que significan sin medida y con medida. Para señalar el hecho de que estos números (los irracionales) no tenían expresión los designaba con la voz alogos. Boecio (475-554 D. C.), al traducir empleó commensurabilis e incommensurabilis. Sin embargo, Gerardo de Cremona (1114-1187), en una traducción de un comentario árabe sobre Euclides, utilizó erróneamente rationalis e irrationalis, al tomar logos y alogos como razón y no en la acepción de palabra (verbum), usada por Euclides. Este error se difundió a lo largo de toda la Edad Media, prevaleciendo en nuestros días el nombre de números irracionales.

Como consecuencia de la introducción de los números irracionales, consideramos **racionales** el conjunto de los números fraccionarios y el conjunto de los números enteros. Definimos el número racional como aquel número que puede expresarse como cociente de dos enteros. Y el número irracional como aquel número real que no puede expresarse como el cociente de dos enteros.

Llamamos **número reales** al conjunto de los números racionales e irracionales.

LOS NUMEROS POSITIVOS Y NEGATIVOS

Los números negativos no fueron conocidos por los matemáticos de la antigüedad, salvo en el caso de Diofanto (siglo III D.C.?), que en su Aritmética, al explicar el producto de dos diferencias, introduce un número con signo +. En el siglo VI, los hindúes Brahmagupta y Bháskara usan los números negativos de un modo práctico, sin llegar a dar una definición de ellos. Durante la Edad Media y el Renacimiento los matemáticos rehuyeron usar los números negativos, y fue Newton el primero en comprender la verdadera naturaleza de estos números. Posteriormente Harriot (1560-1621) introdujo los signos + y − para caracterizar los **números positivos y negativos.**

La significación de los **números relativos o con signos** (positivos y negativos) se comprende claramente, cuando los utilizamos para representar el resultado de medir magnitudes relativas, es decir, magnitudes cuyas cantidades pueden tomarse en sentidos opuestos, tal como sucede cuando tratamos de medir la longitud geográfica de una región determinada; o de expresar el grado de temperatura de un lugar dado. En el primer caso, podemos hablar de longitud este u oeste con respecto a un meridiano fijado arbitrariamente (Greenwich). En el segundo caso, podemos referirnos a grados sobre cero o grados bajo cero. Convencionalmente fijamos los números positivos o con signo + en una dirección, y los números negativos o con signo −, en la dirección opuesta.

Si sobre una semirrecta fijamos un punto cero, a partir del cual, hacia la derecha, señalamos puntos que representan una determinada unidad, nos resultan los puntos A, B, C, etc. Si sobre esa misma semirrecta, a partir del punto cero (llamado origen), procedemos del mismo modo hacia la izquierda, tendremos los puntos a, b, c, etc. Si convenimos en que los puntos de la semirrecta indicados a la derecha del punto cero representan números positivos (A, B, C, etc.); los puntos señalados a la izquierda (a, b, c, etc.), representarán números negativos.

Históricamente, los números negativos surgen para hacer posible la resta en todos los casos. De este modo, la resta se convierte en una operación inversa de la suma, y se hace posible restarle a un minuendo menor un sustraendo mayor.

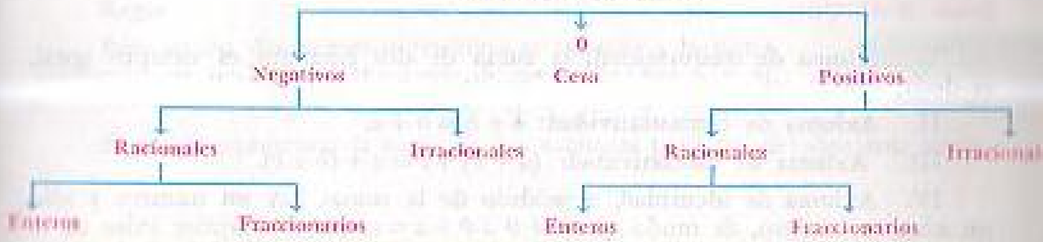
Los números y los símbolos literales negativos se distinguen por el signo − que llevan antepuesto. Los números positivos y su representación literal llevan el signo +, siempre que no inicien una expresión algebraica.

El número cero. Cuando tratamos de aprehender el concepto de número natural, vemos cómo éste surge de la comparación de conjuntos equivalentes o coordinables entre sí. Por extensión llamamos conjunto al que tiene un solo elemento y que se representa por el número 1. Ahora, consideramos el número cero como expresión de un conjunto nulo o vacío, es decir, un conjunto que carece de elementos.

Por otra parte, el cero representa un elemento de separación entre los números negativos y positivos, de modo que el cero es mayor que cualquier número negativo y menor que cualquier número positivo.

El siguiente diagrama nos aclarará las distintas clases de números con los cuales vamos a trabajar:

NUMEROS REALES



LEYES FORMALES DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS REALES

Hemos visto sumariamente cómo a través del curso de la historia de las matemáticas, se ha ido ampliando sucesivamente el campo de los números, hasta llegar al concepto de número real. El camino recorrido ha sido, unas veces, el geométrico, que siempre desemboca en la Aritmética pura, formal; otras veces, el camino puro, formal ha iniciado el recorrido para desembocar en lo intuitivo, en lo geométrico. Como ejemplos del primer caso, tenemos los números irracionales, introducidos como razón de dos segmentos con el propósito de representar magnitudes inconmensurables, y que hacen posible la expresión del resultado de la radicación inexacta. Y también, los números fraccionarios que surgen para expresar el resultado de medir magnitudes conmensurables, y que hacen posible la división inexacta. Como ejemplo del segundo caso, están los números negativos que aparecen por primera vez como raíces de ecuaciones, y hacen posible la resta en todos los casos, ya que cuando el minuendo es menor que el sustraendo esta operación carece de sentido cuando trabajamos con números naturales. Más tarde, estos números negativos (relativos) servirán para expresar los puntos a uno y otro lado de una recta indefinida.

Sin pretensiones de profundizar prematuramente en el campo numérico, vamos a exponer las leyes formales (esto es, que no toman en cuenta la naturaleza de los números) de la suma y de la multiplicación, ya que las demás operaciones fundamentales pueden explicarse como inversas de éstas, así, la resta, la división, la potenciación, la logaritmación y la radicación. Conviene ir adaptando la mentalidad del principiante al carácter formal (abstracto) de estas leyes, pues ello contribuirá a la comprensión de los problemas que ulteriormente le plantearán las matemáticas superiores. Por otra parte, el conjunto de estas leyes formales constituirá una definición indirecta de los números reales y de las operaciones fundamentales. Estas leyes que no requieren demostración, pues son de aprehensión inmediata, se llaman axiomas.

IGUALDAD

I. **Axioma de identidad:** $a = a$.

II. **Axioma de reciprocidad:** si $a = b$, tenemos que $b = a$.

III. **Axioma de transitividad:** si $a = b$ y $b = c$, tenemos que $a = c$.

SUMA O ADICION

I. **Axioma de uniformidad:** la suma de dos números es siempre igual, es decir, única; así, si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $a + c = b + d$.

II. **Axioma de conmutatividad:** $a + b = b + a$.

III. **Axioma de asociatividad:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.

IV. **Axioma de identidad, o módulo de la suma:** hay un número y sólo un número, el cero, de modo que $a + 0 = 0 + a = a$, para cualquier valor de a. De ahí que el cero reciba el nombre de elemento idéntico o módulo de la suma.

MULTIPLICACION

I. **Axioma de uniformidad:** el producto de dos números es siempre igual, es decir, único, así si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $ac = bd$.

II. **Axioma de conmutatividad:** $ab = ba$.

III. **Axioma de asociatividad:** $(ab)c = a(bc)$.

IV. **Axioma de distributividad:** con respecto a la suma tenemos que $a(b + c) = ab + ac$.

V. **Axioma de identidad, o módulo del producto:** hay un número y sólo un número, el uno (1), de modo que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para cualquier valor de a.

VI. **Axioma de existencia del inverso:** para todo número real $a \neq 0$ (a distinto de cero) corresponde un número real, y sólo uno, x, de modo que $ax = 1$. Este número x se llama inverso o recíproco de a, y se representa por $1/a$.

AXIOMAS DE ORDEN

I. **Tricotomía:** Si tenemos dos números reales a y b sólo puede haber una relación, y sólo una, entre ambos, que $a > b$; $a = b$ o $a < b$.

II. **Monotonía de la suma:** si $a > b$ tenemos que $a + c > b + c$.

III. **Monotonía de la multiplicación:** si $a > b$ y $c > 0$ tenemos que $ac > bc$.

AXIOMA DE CONTINUIDAD

I. Si tenemos dos conjuntos de números reales A y B, de modo que todo número de A es menor que cualquier número de B, existirá siempre un número real c con el que se verifique $a \leq c \leq b$, en que a es un número que está dentro del conjunto A, y b es un número que está dentro del conjunto B.

OPERACIONES FUNDAMENTALES CON LOS NUMEROS RELATIVOS

SUMA DE NUMEROS RELATIVOS

En la suma o adición de números relativos podemos considerar cuatro casos: sumar dos números positivos; sumar dos números negativos; sumar un positivo con otro negativo, y sumar el cero con un número positivo o negativo.

1) Suma de dos números positivos

Regla

Para sumar dos números positivos se procede a la suma aritmética de los valores absolutos de ambos números, y al resultado obtenido se le antepone el signo +. Así tenemos:

$(+4) + (+2) =$

Podemos representar la suma de dos números positivos del siguiente modo:

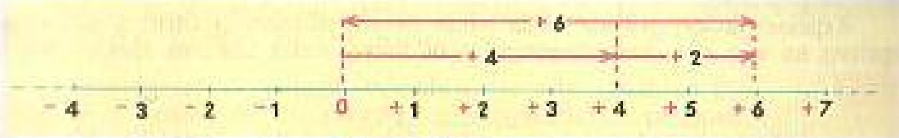


FIGURA 2

2) Suma de dos números negativos

Regla

Para sumar dos números negativos se procede a la suma aritmética de los valores absolutos de ambos, y al resultado obtenido se le antepone el signo −. Así tenemos:

$(-4) + (-2) =$

Podemos representar la suma de dos números negativos del siguiente modo:

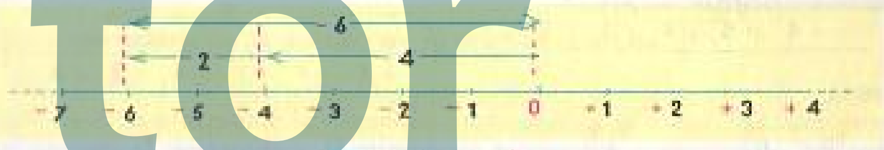


FIGURA 3

3) Suma de un número positivo y otro negativo

Regla

Para sumar un número positivo y un número negativo procede a hallar la diferencia aritmética de los valores olutos de ambos números, y al resultado obtenido se le pone el signo del número mayor. Cuando los dos números tienen igual valor absoluto y signos distintos la suma es o. Así tenemos:

$$(+6)+(-2)=+4$$
$$(-6)+(+2)=-4$$
$$(-6)+(+6)=0$$
$$(+6)+(-6)=0$$

Podemos representar la suma de un número positivo y otro negativo de siguientes modos:

Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número gativo, en que el número positivo tiene mayor valor absoluto que el negativo:

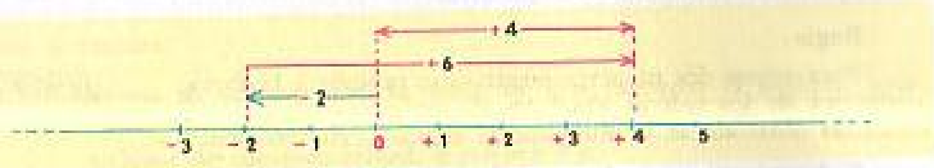


FIGURA 4

Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número egativo, en que el número negativo tiene mayor valor absoluto que el positivo:

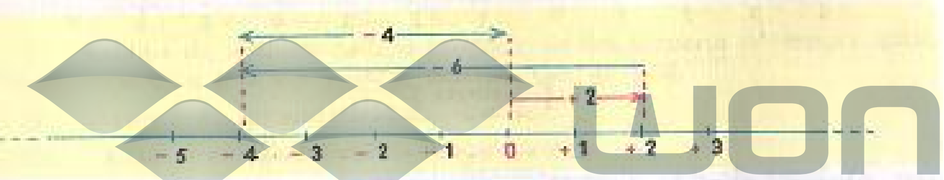


FIGURA 5

Representación gráfica de la suma de un número positivo y un número egativo, en que el valor absoluto de ambos números es igual.

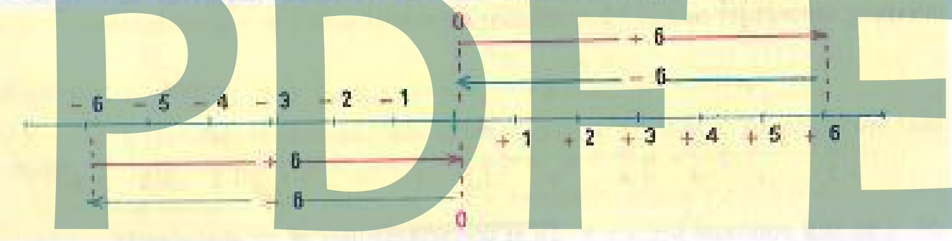


FIGURA 6

4) Suma de cero y un número positivo o negativo

Regla

La suma de cero con cualquier número positivo o negativo nos dará el mismo número positivo o negativo.

Así tenemos: $\longrightarrow$ $(+4)+0=+4$
$(-4)+0=-4$

En general: $\longrightarrow$ $a+0=0+a=a$

En que a puede ser positivo, negativo o nulo.

SUSTRACCION DE NUMEROS RELATIVOS

Llamamos opuesto de un número al mismo número con signo contrario. Así, decimos que $-m$ es opuesto de $+m$. Ya vimos en un caso de la suma que: $(+m)+(-m)=0$

La sustracción es una operación inversa de la suma que consiste en hallar un número x (llamado diferencia), tal que, sumado con un número dado m, dé un resultado igual a otro número n, de modo que se verifique: $x+m=n \quad (1)$

Llamando m' al opuesto de m, podemos determinar la diferencia x, sumando en ambos miembros de la igualdad (1), el número m'; en efecto: $x+m+m'=n+m' \quad (2)$

Si observamos el primer miembro de esta igualdad (2), veremos que aplicando el axioma de asociatividad tenemos: $m+m'=0$, y como $x+0=x$, tendremos: $x=n+m' \quad (3)$

que es lo que queríamos demostrar, es decir, que para hallar la diferencia entre n y m basta sumarle a n el opuesto de m (m'). Y como hemos visto que para hallar el opuesto de un número basta cambiarle el signo, podemos enunciar la siguiente

Regla

Para hallar la diferencia entre dos números relativos se suma al minuendo el sustraendo, cambiándole el signo.

Así:

$$(+8)-(+4)=(+8)+(-4)=+4$$
$$(+8)-(-4)=(+8)+(+4)=+12$$
$$(-8)-(+4)=(-8)+(-4)=-12$$
$$(-8)-(-4)=(-8)+(+4)=-4$$

REPRESENTACION GRAFICA DE LA SUSTRACCION DE NUMEROS RELATIVOS

Por medio de la interpretación geométrica de la sustracción de números relativos, podemos expresar la distancia, en unidades, que hay entre el punto que representa al minuendo y el punto que representa al sustraendo, así como el sentido (negativo o positivo) de esa distancia.

Para expresar la diferencia $(+4)-(-8)=+12$, tendremos:

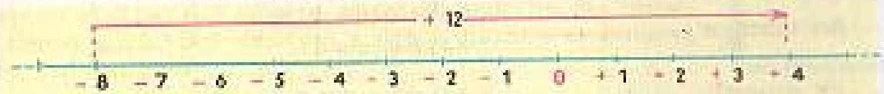


FIGURA 7

Para expresar la diferencia $(-8)-(+4)=-12$, tendremos:

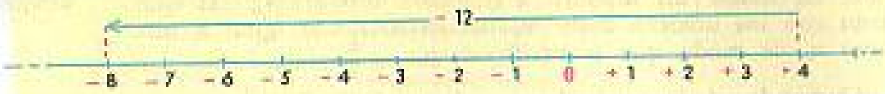


FIGURA 8

MULTIPLICACION DE NUMEROS RELATIVOS

Regla

El producto de dos números relativos se halla multiplicando los valores absolutos de ambos. El producto hallado llevará signo positivo (+), si los signos de ambos factores son iguales; llevará signo negativo (−), si los factores tienen signos distintos. Si uno de los factores es 0 el producto será 0.

Cuando operamos con símbolos literales el producto es siempre indicado, bien en la forma $a \times b$; bien en la forma $a.b$; y más usualmente ab.

Así:

$(+2)(+3)=+6$ $\quad$ $(0)(+3)=0$
$(-2)(-3)=+6$ $\quad$ $(0)(-3)=0$
$(+2)(-3)=-6$ $\quad$ $0\,0=0$
$(-2)(+3)=-6$

El siguiente cuadro es un medio de recordar fácilmente la ley de los signos en la multiplicación de los números relativos.

+ por + da + $\quad$ + por − da −
− por − da + $\quad$ − por + da −

REPRESENTACION GRAFICA DEL PRODUCTO DE DOS NUMEROS RELATIVOS

El producto de dos números relativos puede expresarse geométricamente como el área de un rectángulo cuyo largo y cuyo ancho vienen dados por ambos números. A esta área podemos atribuirle un valor positivo o negativo,

según que sus lados tengan valores de un mismo sentido o de sentidos distintos respectivamente.

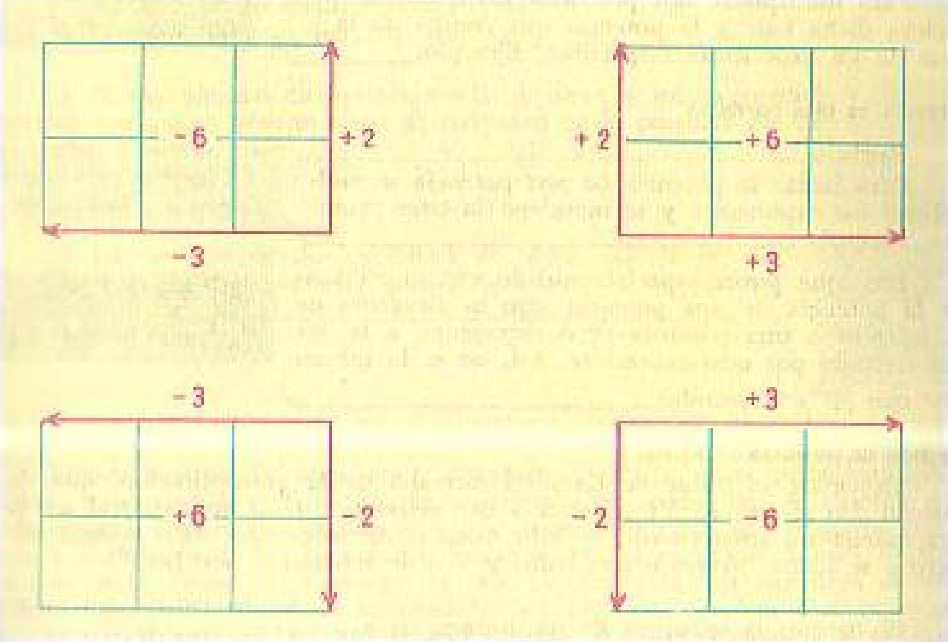


FIGURA 9

POTENCIA DE NUMEROS RELATIVOS

Llamamos potencia de un número relativo al producto de tomarlo como factor tantas veces como se quiera. Si a es un número relativo cualquiera y $n>1$ es un número natural, tendremos la notación a^n, que se lee a elevado a la enésima potencia, e indica que a debe tomarse como factor n veces. Así:

$a^n = \underbrace{a.a.a\ldots\ldots}_{n \text{ veces}}$

En la notación $a^n = x$, llamamos potencia al producto x, base al número que tomamos como factor a, y exponente a n, que nos indica las veces que debemos tomar como factor a a. A la operación de hallar el producto x, la llamamos **potenciación** o **elevación a potencia**.

Ejemplo:

$4^5 = 102$

En este ejemplo, 4 es la base; 5 es el exponente, y 1024 es la potencia.

Regla

La potencia de un número positivo siempre es positiva. La potencia de un número negativo será positiva si el exponente es entero y par: negativa si el exponente entero es impar. Así:

$a^2 = +A$
$(-a)^2 = +A$
$a^3 = +A$
$(-a)^3 = -A$

ODUCTO DE DOS POTENCIAS DE IGUAL BASE

Regla

Para multiplicar dos potencias de igual base, eleva dicha base a la potencia que resulte de la ma de los exponentes respectivos. Ejemplo:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$(3)^2 (3)^4 = 3^{2+4} = 3^6 = 729$$

TENCIA DE UNA POTENCIA

Regla

Para hallar la potencia de una potencia se mul-plican los exponentes y se mantiene la base primi-va. Ejemplo:

$$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm}$$
$$(-2^2)^3 = -2^{2 \times 3} = -2^6 = -64$$

Hay que poner especial cuidado en no confun-r la potencia de una potencia, con la elevación de n número a una potencia cuyo exponente, a la vez té afectado por otro exponente. Así, no es lo mismo $^2)^3$ que (4^{2^3}). Ejemplo:

$$(4^2)^3 = 4^{2 \times 3} = 4^6 = 4096$$
$$(4^{2^3}) = 4^{2 \times 2 \times 2} = 4^8 = 65536$$

VISION DE NUMEROS RELATIVOS

Ya vimos, al tratar de las leyes formales de la multiplicación, que de uerdo con el axioma VI (existencia del inverso), a todo número real $a \neq 0$, orresponde un número real, y sólo uno, x, de modo que $ax = 1$. Este número x se llama inverso o recíproco de a, y se representa por $1/a$.

El inverso o recíproco de un número relativo cualquiera distinto de cero tiene su mismo signo.

El inverso de $+4$ es $+\frac{1}{4}$
El inverso de -4 es $-\frac{1}{4}$
El inverso de $-\sqrt{3}$ es $-\frac{1}{\sqrt{3}}$
El inverso de $+\frac{1}{2}$ es $+2$

La división es una operación inversa de la multiplicación que consiste n hallar uno de los factores, conocidos el otro factor y el producto. Es decir, ado el dividendo d y el divisor d' hallar el cociente c, de modo que se verifique $d'c = d$.

Recordamos que esta operación sólo es posible si d' es distinto de cero.

Aplicando el axioma de existencia del inverso, tenemos que:

$$1/d' \; (d'c) = 1/d' \; d$$

Sabemos que: $1/d' \; (d'c) = (1/d' \; d') \; c = (+1) \, c = c$

Eliminando queda: $c = 1/d' \; d$

De lo cual deducimos la siguiente

Regla

Para dividir un número cualquiera d por otro número distinto de cero d', multiplicamos d por el recíproco d' $(1/d')$. El cociente que resulte será positivo i los dos números son del mismo signo; y negativo, si son de signos contrarios.

Con el siguiente cuadro podemos recordar fácilmente la ley de los signos de la división con números relativos.

+ entre + da +
− entre − da +
+ entre − da −
− entre + da −

Ahora que estudiamos la división, podemos enunciar tres casos de la elevación a potencia de un número cualquiera.

1) Si un número cualquiera $a \neq 0$, se eleva a la potencia 0 es igual a $+1$. Así:

$$a^0 = +1$$
$$3^0 = +1$$

2) Si un número cualquiera $a \neq 0$, se eleva a un exponente negativo cualquiera $-m$ es igual al recíproco de la potencia a^m, de exponente positivo. Así:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$
$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} =$$

3) La división de dos potencias de igual base es igual a la base elevada a la potencia que dé la diferencia de ambos exponentes. Así:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2 =$$

UNIFORMIDAD DE LAS OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS RELATIVOS

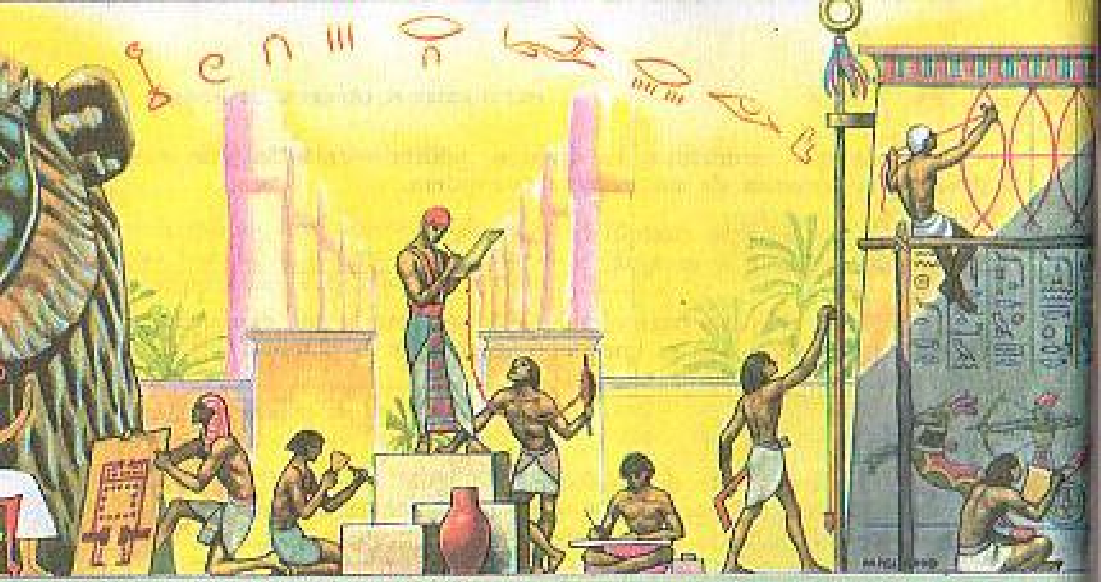
Hemos visto en las operaciones estudiadas, a saber: suma, resta, multiplicación, potenciación y división, que se cumple en todas ellas el axioma de uniformidad. Quiere esto significar que cuando sometemos dos números relativos a cualquiera de las operaciones mencionadas, el resultado es uno, y sólo uno, es decir, único. Sin embargo, cuando extraemos la raíz cuadrada de un número positivo, tenemos un resultado doble. Pues como veremos, al estudiar la extracción de las raíces, un número positivo cualquiera siempre tiene dos raíces de grado par, una positiva y otra negativa.

Así: $\sqrt{+a} = \pm a'$ porque: $(+a')^2 = (+a')(+a') = +a$; $(-a')^2 = (-a')(-a') = +a$

del mismo modo: $\sqrt{+64} = \pm 8$ porque: $(+8)^2 = (+8)(+8) = +64$; $(-8)^2 = (-8)(-8) = +64$

POSIBILIDAD DE AMPLIAR EL CAMPO NUMERICO

Los números reales no cierran la posibilidad de ampliación del campo numérico. Tal posibilidad se mantiene abierta para la introducción de nuevos entes, siempre que tales entes cumplan las leyes formales. Dentro de los límites de este texto, el estudiante todavía se enfrentará con una nueva ampliación del campo numérico. Se trata del número complejo, que es un par de números dados en un orden determinado y que está constituido por un número real y un número imaginario. Con estos números podremos representar un punto cualquiera en el plano. En el capítulo XXXII se presentará una discusión amplia sobre estos números.



...EBRA EN EL ANTIGUO EGIPTO (5,000-500 ... En Egipto, maravilloso pueblo de faraones y ...es, encontramos los primeros vestigios del de... de una ciencia matemática. Sus exigencias vi... ...ujetas a las periódicas inundaciones del Nilo, los llevaron a perfeccionar la Aritmética y la Geometría. En el papiro de Rhind, debido al escriba Ahmes (1650 A. C.), el más valioso y antiguo documento matemático que existe, se presentan entre múltiples problemas, soluciones de ecuaciones de segundo grado.

CAPITULO I

SUMA

(33) LA SUMA O ADICION es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas (sumandos) en una sola expresión algebraica (suma).

Así, la suma de a y b es $a+b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones algebraicas dadas: a y b.

La suma de a y $-b$ es $a-b$, porque esta última expresión es la reunión de las dos expresiones dadas: a y $-b$.

(34) CARACTER GENERAL DE LA SUMA ALGEBRAICA

En Aritmética, la suma siempre significa aumento, pero en Algebra la suma es un concepto más general, pues puede significar aumento o disminución, ya que hay sumas algebraicas como la del último ejemplo, que equivale a una resta en Aritmética.

Resulta, pues, que **sumar una cantidad negativa equivale a restar una cantidad positiva de igual valor absoluto.**

Así, la suma de m y $-n$ es $m-n$, que equivale a restar de m el valor absoluto de $-n$ que es $|n|$.

La suma de $-2x$ y $-3y$ es $-2x-3y$, que equivale a restar de $-2x$ el valor absoluto de $-3y$ que es $|3y|$.

(35) REGLA GENERAL PARA SUMAR

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.

I. SUMA DE MONOMIOS

1) Sumar $5a$, $6b$ y $8c$.

Los escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, y como $5a=+5a$, $6b=+6b$ y $8c=+8c$ la suma será: $5a+6b+8c$.

El orden de los sumandos no altera la suma. Así, $5a+6b+8c$ es lo mismo que $5a+8c+6b$ o que $6b+8c+5a$.

Esta es la **Ley Conmutativa** de la suma.

2) Sumar $3a^2b$, $4ab^2$, a^2b, $7ab^2$ y $6b^3$.

Tendremos:

$$3a^2b+4ab^2+a^2b+7ab^2+6b^3.$$

Reduciendo los términos semejantes, queda: $4a^2b+11ab^2+6b^3$.

3) Sumar $3a$ y $-2b$.

Cuando algún sumando es **negativo,** suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma; así: $3a+(-$...

La suma será:

$$3a-2b. \quad \text{R.}$$

4) Suma $7a$, $-8b$, $-15a$, $9b$, $-4c$ y 8.

Tendremos:

$$7a+(-8b)+(-15a)+9b+(-4c)+8=7a-8b-15a+9b-4c+8=-8a+b-4c+8. \quad \text{R.}$$

5) Sumar $\frac{2}{3}a^2$, $\frac{1}{2}ab$, $-2b^2$, $-\frac{3}{4}ab$, $\frac{1}{3}a^2$, $-\frac{8}{5}b^2$.

$$\tfrac{2}{3}a^2+\tfrac{1}{2}ab+(-2b^2)+(-\tfrac{3}{4}ab)+\tfrac{1}{3}a^2+(-\tfrac{8}{5}b^2)$$

$$=\tfrac{2}{3}a^2+\tfrac{1}{2}ab-2b^2-\tfrac{3}{4}ab+\tfrac{1}{3}a^2-\tfrac{8}{5}b^2=a^2-\tfrac{1}{4}ab-\tfrac{18}{5}b^2. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 15

Sumar:

1. m, n.
2. m, $-n$.
3. $-3a$, $4b$.
4. $5b$, $-6a$.
5. 7, -6.
6. -6, 9.
7. $-2x$, $3y$.
8. $5mn$, $-m$.
9. $5a$, $7a$.
10. $-8x$, $-5x$.
11. $-11m$, $8m$.
12. $9ab$, $-15ab$.
13. $-xy$, $-9xy$.
14. mn, $-11mn$.
15. $\frac{1}{2}a$, $-\frac{2}{3}b$.
16. $\frac{3}{5}b$, $\frac{3}{4}c$.
17. $\frac{1}{3}b$, $\frac{2}{3}b$.
18. $-\frac{1}{2}xy$, $-\frac{1}{2}xy$.
19. $-\frac{3}{5}abc$, $-\frac{2}{5}abc$.
20. $-4x^2y$, $\frac{3}{8}x^2y$.
21. $\frac{3}{8}mn$, $-\frac{3}{4}mn$.
22. a, b, c.
23. a, $-b$, c.
24. a, $-b$, $2c$.
25. $3m$, $-2n$, $4p$...
26. a^2, $-7ab$, ...
27. x^2, $-3xy$, ...
28. x^3, $-x^2y$, 6...
29. $2a$, $-b$, $3a$.
30. $-m$, $-8n$, 4...
31. $-7a$, $8a$, $-b$...
32. $\frac{1}{2}x$, $\frac{2}{3}y$, ...

$\frac{3}{5}m, -m, -\frac{2}{5}mn.$
$a^2, 5ab, 3b^2, -a^2.$
$mn^2, -5m, 17mn^2, -4m.$
$-8x^2y, 5, -7x^3, 4x^2y.$
$^2, 9xy, -6xy, 7y^2, -x^2.$
$a^2b, 5ab^2, -a^2b, -11ab^2, -7b^3.$
$, -8m^2n, 7mn^2, -n^3, 7m^2n.$
$, \frac{2}{3}b, -\frac{1}{4}a, \frac{1}{5}b, -6.$
$-3b, -8c, 4b, -a, 8c.$

42. $m^3, -4m^2n, 5m^3, -7mn^2, -4m^2n, -5m^3.$
43. $9x, -11y, -x, -6y, 4z, -6z.$
44. $6a^2, -7b^2, -11, -5ab, 9a^2, -8b^2.$
45. $-x^2y^2, -5xy^3, -4y^4, 7xy^3, -8, x^2y^2.$
46. $3a, \frac{1}{2}b, -4, -b, -\frac{1}{2}a, 6.$
47. $\frac{1}{2}x^2, \frac{2}{3}xy, \frac{5}{6}y^2, -\frac{1}{3}xy, \frac{3}{4}x^2, -\frac{5}{6}y^2.$
48. $5a^x, -6a^{x+1}, 8a^{x+2}, a^{x+1}, 5a^{x+1}, -5a^x.$
49. $\frac{3}{4}x^2, -\frac{2}{3}xy, \frac{1}{5}y^2, -\frac{1}{3}xy, x^2, 5y^2.$
50. $\frac{3}{4}a^2b, \frac{1}{2}ab^2, -\frac{1}{4}a^2b, \frac{1}{2}ab^2, a^2b, -\frac{5}{6}ab^2.$

II. SUMA DE POLINOMIOS

1) Sumar $a-b$, $2a+3b-c$ y $-4a+5b$.

La suma suele indicarse incluyendo los sumandos dentro de paréntesis; así: $(a-b)+(2a+3b-c)+(-4a+5b)$.

Ahora colocamos todos los términos de estos polinomios unos a continuación de otros con sus propios signos, y tendremos:

$$a-b+2a+3b-c-4a+5b=-a+7b-c. \quad \text{R.}$$

En la práctica, suelen colocarse los polinomios unos debajo de los otros de modo que los términos semejantes queden en columna; se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Así, la suma anterior se verifica de esta manera:

$$\begin{array}{r} a-\ \ b \\ 2a+3b-c \\ -4a+5b \\ \hline -\ \ a+7b-c. \end{array} \quad \text{R.}$$

2) Sumar $3m-2n+4$, $6n+4p-5$, $8n-6$ y $m-n-4p$.

Tendremos:

$$\begin{array}{rrrr} 3m & -\ 2n & & +4 \\ & 6n & +4p & -5 \\ & 8n & & -6 \\ m & -\ \ n & -4p & \\ \hline 4m & +11n & & -7. \end{array} \quad \text{R.}$$

36 PRUEBA DE LA SUMA POR EL VALOR NUMERICO

Se halla el valor numérico de los sumandos y de la suma para los mismos valores, que fijamos nosotros, de las letras. Si la operación está correcta, la suma algebraica de los valores numéricos de los sumandos debe ser igual al valor numérico de la suma.

Ejemplo

Sumar $8a-3b+5c-d$, $-2b+c-4d$ y $-3a+5b-c$ y probar el resultado por el valor numérico para $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$.

Tendremos:

$$\begin{array}{rrrrl} 8a & -3b & +5c & -\ d & = \ \ 8-\ 6+15-\ 4= \ \ 13 \\ & -2b & +\ c & -4d & = \quad\ -\ 4+\ 3-16=-17 \\ -3a & +5b & -\ c & & =-3+10-\ 3\ \ \ = \quad 4 \\ \hline 5a & & +5c & -5d & \ \ \ \ 5 \quad +15-20= \quad 0 \end{array}$$

La suma de los valores numéricos de los sumandos $13-17+4=0$, igual que el valor numérico de la suma que también es cero.

EJERCICIO 16

Hallar la suma de:

1. $3a+2b-c; 2a+3b+c.$
2. $7a-4b+5c; -7a+4b-6c.$
3. $m+n-p; -m-n+p.$
4. $9x-3y+5; -x-y+4; -5x+4y-9.$
5. $a+b-c; 2a+2b-2c; -3a-b+3c.$
6. $p+q+r; -2p-6q+3r; p+5q-8r.$
7. $-7x-4y+6z; 10x-20y-8z; -5x+24y+2z.$
8. $-2m+3n-6; 3m-8n+8; -5m+n-10.$
9. $-5a-2b-3c; 7a-3b+5c; -8a+5b-3c.$
10. $ab+bc+cd; -8ab-3bc-3cd; 5ab+2bc+2$
11. $ax-ay-az; -5ax-7ay-6az; 4ax+9ay+8az.$
12. $5x-7y+8; -y+6-4x; 9-3x+8y.$
13. $-am+6mn-4s; 6s-am-5mn; -2s-5mn+3am.$
14. $2a+3b; 6b-4c; -a+8c.$
15. $6m-3n; -4n+5p; -m-5p.$
16. $2a+3b; 5c-4; 8a+6; 7c-9.$
17. $2x-3y; 5z+9; 6x-4; 3y-5.$
18. $8a+3b-c; 5a-b+c; -a-b-c; 7a-b+4c.$
19. $7x+2y-4; 9y-6z+5; -y+3z-6; -5+8x-3y.$
20. $-m-n-p; m+2n-5; 3p-6m+4; 2n+5m-8.$
21. $5a^x-3a^m-7a^n; -8a^x+5a^m-9a^n; -11a^x+5a^m+16a^n.$
22. $6m^{a+1}-7m^{a+2}-5m^{a+3}; 4m^{a+1}-7m^{a+2}-m^{a+3}; -5m^{a+1}+3m^{a+2}+12m^{a+3}.$
23. $8x+y+z+u; -3x-4y-2z+3u; 4x+5y+3z-4u; -9x-y+z+2u.$
24. $a+b-c+d; a-b+c-d; -2a+3b-2c+d; -3a-3b+4c-d.$
25. $5ab-3bc+4cd; 2bc+2cd-3de; 4bc-2ab+3de; -3bc-6cd-ab.$
26. $a-b; b-c; c+d; a-c; c-d; d-a; a-d.$

3) Sumar $3x^2-4xy+y^2$, $-5xy+6x^2-3y^2$ y $-6y^2-8xy-9x^2$.

Si los polinomios que se suman pueden ordenarse con relación a una letra, deben ordenarse todos con relación a una misma letra antes de sumar.

Así, en este caso vamos a ordenar en orden descendente con relación a x y tendremos:

$$\begin{array}{rrr} 3x^2 & -\ \ 4xy & +\ y^2 \\ 6x^2 & -\ \ 5xy & -3y^2 \\ -9x^2 & -\ \ 8xy & -6y^2 \\ \hline & -17xy & -8y^2. \end{array} \quad \text{R.}$$

4) Sumar

$a^3b-b^4+ab^3,\quad -2a^2b^2+4ab^3+2b^4\quad$ y $\quad 5a^3b-4ab^3-6a^2b^2-b^4-6.$

Ordenando con relación a la a se tiene:

$$\begin{array}{rrrrr} a^3b & & +\;ab^3 & -\;b^4 & \\ & -2a^2b^2 & +\;4ab^3 & +\;2b^4 & \\ 5a^3b & -\;6a^2b^2 & -\;4ab^3 & -\;b^4 & -\;6 \\ \hline 6a^3b & -\;8a^2b^2 & +\;ab^3 & & -\;6. \end{array}\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 17

Hallar la suma de:

$...^2+4x;\ -5x+x^2.$
$...^2+ab;\ -2ab+b^2.$
$...^3+2x;\ -x^2+4.$
$...^4-3a^2;\ a^3+4a.$
$...-x^2+3x;\ x^3+6.$
$...^2-4x;\ -7x+6;\ 3x^2-5.$
$...n^2+n^2;\ -3mn+4n^2;\ -5m^2-5n^2.$

8. $3x+x^3;\ -4x^2+5;\ -x^3+4x^2-6.$
9. $x^2-3xy+y^2;\ -2y^2+3xy-x^2;\ x^2+3xy-y^2.$
10. $a^2-3ab+b^2;\ -5ab+a^2-b^2;\ 8ab-b^2-2a^2.$
11. $-7x^2+5x-6;\ 8x-9+4x^2;\ -7x+14-x^2.$
12. $a^3-4a+5;\ a^3-2a^2+6;\ a^2-7a+4.$
13. $-x^2+x-6;\ x^3-7x^2+5;\ -x^3+8x-5.$
14. $a^3-b^3;\ 5a^2b-4ab^2;\ a^3-7ab^2-b^3.$
15. $x^3+xy^2+y^3;\ -5x^2y+x^3-y^3;\ 2x^3-4xy^2-5y^3.$
16. $-7m^2n+4n^3;\ m^3+6mn^2-n^3;\ -m^3+7m^2n+5n^3.$
17. $x^4-x^2+x;\ x^3-4x^2+5;\ 7x^2-4x+6.$
18. $a^4+a^6+6;\ a^5-3a^3+8;\ a^3-a^2-14.$
19. $x^5+x-9;\ 3x^4-7x^2+6;\ -3x^3-4x+5.$
20. $a^3+a;\ a^2+5;\ 7a^2+4a;\ -8a^2-6.$
21. $x^4-x^2y^2;\ -5x^3y+6xy^3;\ -4xy^3+y^4;\ -4x^2y^2-6.$
22. $xy+x^2;\ -7y^2+4xy-x^2;\ 5y^2-x^2+6xy;\ -6x^2-4xy+y^2.$
23. $a^3-8ax^2+x^3;\ 5a^2x-6ax^2-x^3;\ 3a^3-5a^2x-x^3;\ a^3+14ax^2-x^3.$
24. $-8a^2m+6am^2-m^3;\ a^3-5am^2+m^3;\ -4a^3+4a^2m-3am^2;\ 7a^2m-4am^2-6.$
25. $x^5-x^3y^2-xy^4;\ 2x^4y+3x^2y^3-y^5;\ 3x^3y^2-4xy^4-y^5;\ x^5+5xy^4+2y^5.$
26. $a^6+a^4+a^2;\ a^5+a^3+6;\ 3a^2+5a-8;\ -a^5-4a^2-5a+6.$
27. $a^4-b^4;\ -a^3b+a^2b^2-ab^3;\ -3a^4+5a^3b-4a^2b^2;\ -4a^3b+3a^2b^2-3b^4.$
28. $m^3-n^3+6m^2n;\ -4m^2n+5mn^2+n^3;\ m^3-n^3+6mn^2;\ -2m^3-2m^2n+n^3.$
29. $a^x-3a^{x-2};\ 5a^{x-1}+6a^{x-3};\ 7a^{x-3}+a^{x-4};\ a^{x-1}-13a^{x-3}.$
30. $a^{x+2}-a^x+a^{x+1};\ -3a^{x+3}-a^{x-1}+a^{x-2};\ -a^x+4a^{x+3}-5a^{x+2};\ a^{x-1}-a^{x-2}+a^{x+2}.$

37 SUMA DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

1) Sumar $\frac{1}{2}x^3+2y^3-\frac{2}{5}x^2y+3,\ -\frac{1}{10}x^2y+\frac{3}{4}xy^2-\frac{3}{7}y^3,\ -\frac{1}{2}y^3+\frac{1}{8}xy^2-5.$

Tendremos:

$$\begin{array}{rrrrr} \frac{1}{2}x^3 & -\;\frac{2}{5}x^2y & & +\;2y^3 & +\;3 \\ & -\;\frac{1}{10}x^2y & +\;\frac{3}{4}xy^2 & -\;\frac{3}{7}y^3 & \\ & & \frac{1}{8}xy^2 & -\;\frac{1}{2}y^3 & -\;5 \\ \hline \frac{1}{2}x^3 & -\;\frac{1}{2}x^2y & +\;\frac{7}{8}xy^2 & +\;\frac{15}{14}y^3 & -\;2. \end{array}\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 18

Hallar la suma de:

1. $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}xy;\ \frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}y^2.$
2. $a^2+\frac{1}{2}ab;\ -\frac{1}{4}ab+\frac{1}{2}b^2;\ -\frac{1}{4}ab-\frac{1}{5}b^2.$
3. $x^2+\frac{2}{3}xy;\ -\frac{1}{6}xy+y^2;\ -\frac{5}{6}xy+\frac{2}{3}y^2.$
4. $\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}y^2;\ -\frac{2}{5}xy+\frac{1}{6}y^2;\ \frac{1}{10}xy+\frac{1}{3}y^2.$
5. $\frac{2}{3}a^2+\frac{1}{5}ab-\frac{1}{2}b^2;\ \frac{5}{6}a^2-\frac{1}{10}ab+\frac{1}{6}b^2;\ -\frac{1}{12}a^2+\frac{1}{20}ab-\frac{1}{3}b^2.$
6. $\frac{5}{6}x^2-\frac{2}{3}y^2+\frac{3}{4}xy;\ -\frac{1}{2}xy-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{8}y^2;\ \frac{5}{6}xy-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}y^2.$
7. $a^3-\frac{1}{2}ab^2+b^3;\ \frac{5}{6}a^2b-\frac{3}{8}ab^2-2b^3;\ \frac{1}{4}a^3-\frac{1}{2}a^2b-\frac{3}{5}b^3.$
8. $x^4-x^2+5;\ \frac{2}{3}x^3-\frac{3}{8}x-3;\ -\frac{3}{5}x^3+\frac{5}{6}x^2-\frac{3}{4}x.$
9. $\frac{2}{3}m^3-\frac{1}{4}mn^2+\frac{2}{5}n^3;\ \frac{1}{8}m^2n+\frac{1}{8}mn^2-\frac{3}{5}n^3;\ m^3-\frac{1}{2}\quad n-n^3.$
10. $x^4+2x^2y^2+\frac{2}{7}y^4;\ -\frac{5}{6}x^4+\frac{3}{5}x^2y^2-\frac{1}{6}xy^3-\frac{1}{14}y^4;\ -\frac{5}{6}x^3y-\frac{1}{4}x^2y^2+\frac{1}{7}y^4.$
11. $x^5-\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{5}x;\ -3x^5+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{10}x;\ -\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2;\ -\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{5}x-4.$
12. $\frac{2}{9}a^3+\frac{5}{6}ax^2-\frac{1}{3}x^3;\ -\frac{3}{7}a^2x-\frac{7}{8}ax^2-\frac{1}{9}x^3;\ -\frac{2}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2x-\frac{1}{4}ax^2.$
13. $a^6-a^4+a^2;\ \frac{3}{5}a^5-\frac{3}{8}a^3-\frac{1}{2}a;\ -\frac{3}{7}a^4-\frac{5}{8}a^2+6;\ -\frac{3}{8}a-6.$
14. $x^5-y^5;\ \frac{1}{10}x^3y^2-\frac{3}{4}xy^4-\frac{1}{6}y^5;\ \frac{3}{5}x^4y-\frac{5}{6}x^2y^3-\frac{1}{6}y^5;\ 2x^4y-\frac{2}{5}x^3y^2-\frac{1}{3}y^5.$

EJERCICIO 19

Sumar las expresiones siguientes y hallar el valor numérico del resultado para $a=2,\ b=3,\ c=10,\ x=5,\ y=4,\ m=\frac{2}{3},\ n=\frac{1}{5}.$

1. $4x-5y;\ -3x+6y-8;\ -x+y.$
2. $x^2-5x+8;\ -x^2+10x-30;\ -6x^2+5x-50.$
3. $x^4-y^4;\ -5x^2y^2-8+2x^4;\ -4x^4+7x^3y+10xy^3.$
4. $3m-5n+6;\ -6m+8-20n;\ -20n+12m-12.$
5. $nx+cn-ab;\ -ab+8nx-2cn;\ -ab+nx-5.$
6. $a^3+b^3;\ -3a^2b+8ab^2-b^3;\ -5a^3-6ab^2+8;\ 3a^2b-2b^3.$
7. $27m^3+125n^3;\ -9m^2n+25mn^2;\ -14mn^2-8;\ 11mn^2+10m^2n.$
8. $x^{a-1}+y^{b-2}+m^{x-4};\ 2x^{a-1}-2y^{b-2}-2m^{x-4};\ 3y^{b-2}-2m^{x-4}.$
9. $n^{b-1}-m^{x-3}+8;\ -5n^{b-1}-3m^{x-3}+10;\ 4n^{b-1}+5m^{x-3}-18.$
10. $x^3y-xy^3+5;\ x^4-x^2y^2+5x^3y-6;\ -6xy^3+x^2y^2+2;\ -y^4+3xy^3+1.$
11. $\frac{3}{4}a^2+\frac{2}{3}b^2;\ -\frac{1}{8}ab+\frac{1}{9}b^2;\ \frac{1}{6}ab-\frac{1}{3}b^2.$
12. $\frac{9}{17}m^2+\frac{25}{34}n^2-\frac{1}{4};\ -15mn+\frac{1}{2};\ \frac{5}{17}n^2+\frac{7}{34}m^2-\frac{1}{4};\ -\frac{7}{34}m^2-30mn+3.$
13. $\frac{1}{2}b^2m-\frac{3}{5}cn-2;\ \frac{3}{4}b^2m+6-\frac{1}{10}cn;\ -\frac{1}{4}b^2m+\frac{1}{25}cn+4;\ 2cn+\frac{3}{5}-\frac{1}{6}b^2m.$
14. $0.2a^3+0.4ab^2-0.5a^2b;\ -0.8b^3+0.6ab^2-0.3a^2b;\ -0.4a^3+6-0.8a^2b;\ 0.2a^3+0.9b^3+1.5a^2b.$

...LCULO EN CALDEA Y ASIRIA (5,000-500) ... No ha sido sino recientemente que se ha ... de manifiesto la enorme contribución de los ..., asirios y babilonios al acervo matemático de ...anidad. En tablillas descifradas hace muy poco tiempo (1930), figuran operaciones algebraicas con ecuaciones de segundo grado y tablas de potencias que requieren un dominio de la matemática elemental, pero no supone esto que los caldeos tuvieran toda una concepción abstracta de las matemáticas.

CAPITULO II

RESTA

38 **LA RESTA O SUSTRACCION** es una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (**minuendo**) y uno de ellos (**sustraendo**), hallar el otro sumando (**resta o diferencia**).

Es evidente, de esta definición, que la suma del sustraendo y la diferencia tiene que ser el minuendo.

Si de a (minuendo) queremos restar b (sustraendo), la diferencia será $a-b$. En efecto: $a-b$ será la diferencia si sumada con el sustraendo b reproduce el minuendo a, y en efecto: $a-b+b=a$.

39 **REGLA GENERAL PARA RESTAR**

Se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes, si los hay.

I. RESTA DE MONOMIOS

1) De -4 restar 7.

Escribimos el minuendo -4 con su **propio** signo y a continuación el sustraendo 7 con el **signo cambiado** y la resta será: $-4-7=-11$. R.

En efecto: -11 es la diferencia porque sumada con el sustraendo 7 reproduce el minuendo -4: $-11+7=-4$.

2) Restar $4b$ de $2a$.

Escribimos el minuendo $2a$ con su signo y a continuación el sustraendo $4b$ con el **signo cambiado** y la resta será: $2a-4b$.

En efecto: $2a-4b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4b$ reproduce el minuendo: $2a-4b+4b=$ ...

3) Restar $4a^2b$ de $-5a^2b$.

Escribo el minuendo $-5a^2b$ y a continuación el sustraendo $4a^2b$ con el **signo cambiado** y tengo: $-5a^2b-4a^2b=-9a^2b$.

$-9a^2b$ es la diferencia, porque sumada con el sustraendo $4a^2b$ reproduce el minuendo: $-9a^2b+4a^2b=-5$...

4) De 7 restar -4.

Cuando el sustraendo es **negativo** suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la operación, de este modo distinguimos el signo $-$ que indica la resta del signo $-$ que señala el carácter negativo del sustraendo. Así: $7-(-4)=7+4=11$.

El signo $-$ delante del paréntesis está para **indicar la resta** y este signo no tiene más objeto que decirnos, de acuerdo con la regla general para restar, que **debemos cambiar el signo** al sustraendo -4. Por eso a continuación del minuendo 7 escribimos $+4$.

5) De $7x^3y^4$ restar $-8x^3y^4$.

Tendremos: $7x^3y^4-(-8x^3y^4)=7x^3y^4+8x^3y^4=15x^3y^4$. R.

6) De $-\frac{1}{2}ab$ restar $-\frac{3}{4}ab$.

Tendremos: $-\frac{1}{2}ab-(-\frac{3}{4}ab)=-\frac{1}{2}ab+\frac{3}{4}ab=\frac{1}{4}ab$. R.

40 **CARACTER GENERAL DE LA RESTA ALGEBRAICA**

En Aritmética la resta siempre implica **disminución**, mientras que la resta algebraica tiene un carácter más general, pues puede significar **disminución o aumento.**

Hay restas algebraicas, como las de los ejemplos **4** y **5** anteriores, en que **la diferencia es mayor que el minuendo.**

Los ejemplos **4**, **5** y **6** nos dicen que **restar una cantidad negativa equivale a sumar la misma cantidad positiva.**

EJERCICIO 20

De:

1.	-8	restar	5.	6.	$2a$	restar	$3b$.	11.	$-9a^2$	restar	$5b^2$
2.	-7	"	4.	7.	$3b$	"	2.	12.	$-7xy$	"	$-5yz$.
3.	8	"	11.	8.	$4x$	"	$6b$.	13.	$3a$	"	$4a$.
4.	-8	"	-11.	9.	$-5a$	"	$6b$.	14.	$11m^2$	"	$25m$
5.	-1	"	-9.	10.	$-8x$	"	-3.	15.	$-6x^2y$	"	$-x^2y$.

$11a^3m^2$	restar	$-7a^3m^2$.	22.	$6a^n$	restar	$-5a^n$.	27.	$-\frac{2}{3}$	restar	$\frac{3}{4}$.
$3ab^2$	"	$-8ab^2$.	23.	$-45a^{x-1}$	"	$-60a^{x-1}$.	28.	$\frac{1}{5}x^2$	"	$-\frac{2}{3}x^2$.
$31x^2y$	"	$-46x^2y$.	24.	$54b^{n-1}$	"	$-86b^{n-1}$.	29.	$\frac{4}{5}x^3y$	"	$-\frac{5}{6}x^3y$.
$34a^2b$	"	$-84a^2b$	25.	$-35m^a$	"	$-60m^a$.	30.	$-\frac{1}{8}ab^2$	"	$-\frac{3}{4}ab^2$.
$3a^{x+1}$	"	$5b^{x+2}$.	26.	5	"	$-\frac{1}{2}$.				
$3x^{n+2}$	"	11.								

Restar

3	de	-2.	43. $-a$	de	$3a$.	55.	$54a^{x+2}$	de	$-85a^{x+2}$.
1	"	7.	44. $-3b$	"	$-4b$.	56.	$-6a$	"	$\frac{1}{4}$.
5	"	-8.	45. $-11x^3$	"	$54x^3$.				
4	"	5.	46. $14a^2b$	"	$78a^2b$.				
7	"	-7.	47. $-43a^2y$	"	$-54a^2y$.	57.	-5	"	$-\frac{2}{3}$.
5	"	$2a$.	48. $9ab$	"	$-ab$.				
b	"	$-3x$.	49. $-31x^2y$	"	$-31x^2y$.	58.	$\frac{3}{5}m^3$	"	$-\frac{7}{10}m^3$.
$5m$	"	$-2n$.	50. a^x	"	$-3a^x$.				
$6a$	"	$3b$.	51. $-7a^{x+1}$	"	$311a^{x+1}$.	59.	$-\frac{11}{12}a^2b^2$	"	$\frac{5}{6}a^2b^2$.
$5a^3$	"	$8b$.	52. $9m^x$	"	$105m^x$				
9	"	$-7a$.	53. $18a^{x-1}$	"	$-31a^{x-1}$.				
25	"	$25ab$.	54. $-19m^a$	"	$-236m^a$.	60.	$45a^3b^2$	"	$-\frac{1}{9}a^3b^2$.

II. RESTA DE POLINOMIOS

(41) Cuando el sustraendo es un polinomio, hay que restar del minuendo **cada uno de los términos del sustraendo**, así que a continuación del minuendo escribiremos el sustraendo **cambiándole el signo a todos sus términos**.

Ejemplos

(1) De $4x-3y+z$ restar $2x+5z-6$.

La sustracción se indica incluyendo el sustraendo en un paréntesis precedido del signo $-$, así: $4x-3y+z-(2x+5z-6)$.

Ahora, dejamos el minuendo con sus propios signos y a continuación escribimos el sustraendo *cambiándole el signo a todos sus términos* y tendremos: $4x-3y+z-2x-5z+6$.

Reduciendo los términos semejantes, tendremos: $2x-3y-4z+6$. R.

En la práctica suele escribirse el sustraendo con sus signos cambiados debajo del minuendo, de modo que los términos semejantes queden en columna y se hace la reducción de éstos, separándolos unos de otros con sus propios signos.

Así, la resta anterior se verifica de esta manera:

$$\begin{array}{rrrr} 4x & -3y & +z & \\ -2x & & -5z & +6 \\ \hline 2x & -3y & -4z & +6. \end{array}\quad \text{R.}$$

PRUEBA

La diferencia sumada con el sustraendo debe dar el minuendo.

En el ejemplo anterior, sumando la diferencia $2x-3y-4z+6$ con el sustraendo $2x+5z-6$, tendremos:

$$\begin{array}{rrrr} 2x & -3y & -4z & +6 \\ 2x & & +5z & -6 \\ \hline 4x & -3y & +z & \end{array}\quad \text{(minuendo).}$$

(2) Restar $-4a^5b-ab^5+6a^3b^3-a^2b^4-3b^6$ de $8a^4b^2+a^6-4a^2b^4+6ab^5$.

Al escribir el sustraendo, con sus signos cambiados, debajo del minuendo, *deben ordenarse ambos con relación a una misma letra.*

Así, en este caso, ordenando en orden descendente con relación a la a tendremos:

$$\begin{array}{l} a^6 \qquad\qquad + 8a^4b^2 \qquad\qquad - 4a^2b^4 + 6ab^5 \\ \quad + 4a^5b \qquad\qquad - 6a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + 3b^6 \\ \hline a^6 + 4a^5b + 8a^4b^2 - 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6. \end{array}$$

La diferencia sumada con el sustraendo, debe darnos el minuendo:

$$\begin{array}{l} a^6 + 4a^5b + 8a^4b^2 - 6a^3b^3 - 3a^2b^4 + 7ab^5 + 3b^6 \\ \quad - 4a^5b \qquad\qquad + 6a^3b^3 - a^2b^4 - ab^5 - 3b^6 \\ \hline a^6 \qquad\qquad + 8a^4b^2 \qquad\qquad - 4a^2b^4 + 6ab^5 \end{array}\quad \text{(minuendo)}$$

(3) Restar $-8a^2x+6-5ax^2-x^3$ de $7a^3+8a^2x+7ax^2-4$ y probar el resultado por el valor numérico.

Efectuemos la resta ordenando con relación a la x:

$$\begin{array}{rrrrr} & 7ax^2 & +8a^2x & +7a^3 & -4 \\ x^3 & +5ax^2 & +8a^2x & & -6 \\ \hline x^3 & +12ax^2 & +16a^2x & +7a^3 & -10. \end{array}$$

La prueba del valor numérico se efectúa hallando el valor numérico del minuendo, del sustraendo con los signos cambiados y de la diferencia para un mismo valor de las letras (el valor de cada letra lo escogemos nosotros). Reduciendo el valor numérico de minuendo y sustraendo con el signo cambiado, debe darnos el valor numérico de la diferencia.

Así, en el ejemplo anterior para $a=1$, $x=2$, tendremos:

$$\begin{array}{l} 7ax^2 + 8a^2x + 7a^3 - 4 = 28 + 16 + 7 - 4 = \\ x^3 + 5ax^2 + 8a^2x \quad - 6 = 8 + 20 + 16 \quad - 6 = \\ \hline x^3 + 12ax^2 + 16a^2x + 7a^3 - 10 = 8 + 48 + 32 + 7 - 10 = \end{array}$$

EJERCICIO 21

De:

1. $a+b$ restar $a-b$.
2. $2x-3y$ restar $-x+2y$.
3. $8a+b$ restar $-3a+4$.
4. x^2-3x restar $-5x+6$.
5. a^3-a^2b restar $7a^2b+9ab^2$.
6. $x-y+z$ restar $x-y+z$.
7. $x+y-z$ restar $-x-y+z$.
8. x^2+y^2-3xy restar $-y^2+3x^2-4xy$.
9. x^3-x^2+6 restar $5x^2-4x+6$.
10. y^2+6y^3-8 restar $2y^4-3y^2+6y$.
11. a^3-6ab^2+9a restar $15a^2b-8a+5$.
12. $x^4+9xy^3-11y^4$ restar $-8x^3y-6x^2y^2+20y^4$.
13. $a+b+c-d$ restar $-a-b+c-d$.
14. $ab+2ac-3cd-5de$ restar $-4ac+8ab-5cd+5d$
15. $x^3-9x+6x^2-19$ restar $-11x^2+21x-43+6x^3$.
16. $y^5-9y^3+6y^2-31$ restar $-11y^4+31y^3-8y^2-19y$
17. $5m^3-9n^3+6m^2n-8mn^2$ restar $14mn^2-21m^2n+5m^3-18$.
18. $4x^3y-19xy^3+y^4-6x^2y^2$ restar $-x^4-51xy^3+32x^2y^2-25x^3y$.
19. $m^6+m^4n^2-9m^2n^4+19$ restar $-13m^3n^3+16mn^5-30m^2n^4-61$.
20. $-a^5b+6a^3b^3-18ab^5+42$ restar $-8a^6+9b^6-11a^4b^2-11a^2b^4$.

21. $1-x^2+x^4-x^3+3x-6x^5$ restar $-x^6+8x^4-30x^2+15x-24$.
22. $-6x^2y^3+8x^5-23x^4y+80x^3y^2-18$ restar $-y^5+9xy^4+80-21x^3y^2-51x^4y$.
23. $m^6-8m^4n^2+21m^2n^4+8-6mn^5$ restar $-23m^5n+14m^3n^3-24mn^5+8n^6-14$.
24. $x^7-8x+16x^5-23x^2-15$ restar $-8x^6+25x^4-30x^3+51x-18$.
25. $9a^6-15a^4b^2+31a^2b^4-b^6+14$ restar $25a^5b-15a^4b^2+53a^3b^3-9ab^5+3b^6$.
26. $a^x+a^{x+1}-a^{x+2}$ restar $5a^x-6a^{x+1}-a^{x+2}$.
27. $m^a-m^{a-1}+3m^{a-2}$ restar $3m^{a+1}-4m^a+5m^{a-2}+8m^{a-3}$.
28. $a^{m+4}-7a^{m+2}-8a^m+6a^{m-1}$ restar $-5a^{m+3}-14a^{m+2}-11a^{m+1}-8a^{m-1}$.
29. $x^{a+2}-7x^a+9x^{a-1}+25x^{a-2}$ restar $-11x^{a+1}+19x^a+45x^{a-1}+60x^{a-3}$.
30. $m^{n+1}-6m^{n-2}+8m^{n-3}-19m^{n-5}$ restar $8m^n+5m^{n-2}+6m^{n-3}+m^{n-4}+9m^{n-5}$.

EJERCICIO 22

Restar:

$a-b$ de $b-a$.
$x-y$ de $2x+3y$.
$-5a+b$ de $-7a+5$.
x^2-5x de $-x^2+6$.
x^3-xy^2 de x^2y+5xy^2.
a^2b-8a^3 de $7a^2b+5ab^2$.
$a-b+2c$ de $-a+2b-3c$.
$m-n+p$ de $-3n+4m+5p$.
$-x+y-z$ de $x+3y-6z$.
$3a^2+ab-6b^2$ de $-5b^2+8ab+a^2$.

11. m^2-n^2-3mn de $-5m^2-n^2+6mn$.
12. $-x^2-x+6$ de $-8x^2+5x-4$.
13. m^3+14m^2+9 de $14m^2-8n+16$.
14. $ab-bc+6cd$ de $8ab+5bc+6cd$.
15. $25a^2b-8ab^2-b^3$ de $a^3-9a^2b-b^3$.
16. xy^2-6y^3+4 de $6x^3-8x^2y-6xy^2$.
17. $m^2+7n-8c+d$ de $m^2-9n+11c+14$.
18. $7a^3b+5ab^3-8a^2b^2+b^4$ de $5a^4+9a^3b-40ab^3+6b^4$.
19. $6x^3-9x+6x^2-7$ de $x^5-8x^4+25x^2+15$.
20. $x^5-x^2y^3+6xy^4+25y^5$ de $-3xy^4-8x^3y^2-19y^5+18$.

21. $25x+25x^3-18x^2-11x^5-46$ de $x^3-6x^4+8x^2-9+15x$.
22. $8a^4b+a^3b^2-15a^2b^3-45ab^4-8$ de $a^5-26a^3b^2+8ab^4-b^5+6$.
23. $23y^3+8y^4-15y^5-8y-5$ de $y^6+y^3+y^2+9$.
24. $7x^7+5x^5-23x^3+51x+36$ de $x^8-x^6+3x^4-5x^2-9$.
25. $y^7-60x^4y^3+90x^3y^4-50xy^6-x^2y^5$ de $x^7-3x^5y^2+35x^4y^3-8x^2y^5+60$.
26. $a^{x+2}-5a^{x+1}-6a^x$ de $a^{x+3}-8a^{x+1}-5$.
27. $8a^{n-1}+5a^{n-2}+7a^n+a^{n-3}$ de $-8a^n+16a^{n-4}+15a^{n-2}+a^{n-3}$.
28. $31x^{a+1}-9x^{a+2}-x^{a+4}-18x^{a-1}$ de $15x^{a+3}+5x^{a+2}-6x^a+41x^{a-1}$.
29. $12a^{m-2}-5a^{m-1}-a^m-8a^{m-4}$ de $9a^{m-1}-21a^{m-2}+26a^{m-3}+14a^{m-5}$.
30. $-m^{x+4}-6m^{x+1}-23m^{x+2}-m^{x-1}$ de $-15m^{x+3}+50m^{x+1}-14m^x-6m^{x-1}+8m^{x-2}$.

(4) De 1 restar x^2+x+5.

$$\begin{array}{r} 1 \\ -5-x-x^2 \\ \hline -4-x-x^2. \end{array} \quad \text{R.}$$

El sustraendo x^2+x+5 sumado con la diferencia $-4-x-x^2$ nos da el minuendo: →

$$\begin{array}{r} x^2+x+5 \\ -x^2-x-4 \\ \hline 1 \end{array} \text{ (minuendo).}$$

(5) Restar $9ab^3-11a^3b+8a^2b^2-b^4$ de a^4-1.

Tendremos:

$$\begin{array}{l} a^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -1 \\ \qquad 11a^3b-8a^2b^2-9ab^3+b^4 \\ \hline a^4+11a^3b-8a^2b^2-9ab^3+b^4-1. \end{array} \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 23

De:

1. 1 restar $a-1$.
2. 0 restar $a-8$.
3. -9 restar $3a+a^2-5$.
4. 16 restar $5xy-x^2+16$.
5. 1 restar $a^3-a^2b+ab^2$.
6. x^3 restar $-x^3-8x^2y-6xy^2$.

7. a^3 restar $-8a^2b+6ab^2-b^3$.
8. y^4 restar $-5x^3y+7x^2y^2-8xy^3$.
9. m^4 restar $a^3m-a^4+7a^2m^2-18am^3+5m^4$.
10. 16 restar $b-a+c+d-14$.
11. x^2-1 restar $xy+y^2$.
12. a^3+6 restar $5a^2b-8ab^2+b^3$.
13. Restar $-5x^2y+17xy^2-5$ de x^3+y^3.
14. Restar $9x^3y-15xy^3-8x^2y^2$ de x^4-1.
15. Restar $-11a^4b+2a^2b^3+8a^3b^2-4ab^4$ de a^5+b^5.
16. Restar $5x^3-25x$ de x^4+x^2+50.
17. Restar $9y^5+17y^4-y^3+18y^2$ de y^6+y-41.
18. Restar $-15a^5b+17a^3b^3-14ab^5-b^6$ de $a^6+9a^4b^2+a^2b^4$.
19. Restar $-x^3+5x-34$ de x^4+x^3-11x.
20. Restar $m^2n+7mn^2-3n^3$ de m^3-1.

42 RESTA DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

(1) De $\frac{3}{5}x^3$ restar $-\frac{1}{2}x^3-\frac{2}{3}xy^2+\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{2}y^3$.

Tendremos:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{5}x^3 \\ \frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2y+\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}y^3 \\ \hline \frac{11}{10}x^3-\frac{3}{4}x^2y+\frac{2}{3}xy^2+\frac{1}{2}y^3. \end{array} \quad \text{R.}$$

(2) Restar $-4a^3b^3-\frac{1}{10}ab+\frac{2}{3}a^2b^2-9$ de $-\frac{3}{5}ab+\frac{1}{6}a^2b^2-8$.

Tendremos:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{6}a^2b^2-\frac{3}{5}ab-8 \\ 4a^3b^3-\frac{2}{3}a^2b^2+\frac{1}{10}ab+9 \\ \hline 4a^3b^3-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{2}ab+1. \end{array} \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 24

De:

1. $\frac{1}{2}a^2$ restar $-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}ab+\frac{2}{5}b^2$.
2. 15 restar $\frac{4}{5}xy+\frac{2}{3}yz-\frac{5}{9}$.
3. $\frac{3}{5}bc$ restar $-\frac{5}{4}ab+\frac{1}{6}bc-\frac{2}{9}cd$.
4. $\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ restar $\frac{4}{5}a+\frac{2}{9}b-\frac{1}{2}$.
5. $\frac{5}{6}x^2-\frac{3}{8}y^2$ restar $\frac{5}{7}xy+\frac{1}{10}y^2-\frac{3}{11}$.
6. $\frac{5}{6}m^3+\frac{2}{9}n^3$ restar $-\frac{1}{2}m^2n+\frac{3}{8}mn^2-$

7. $\frac{3}{7}a^2+\frac{1}{3}ab-\frac{3}{5}b^2$ restar $\frac{5}{14}a^2+\frac{1}{2}ab-\frac{1}{3}$.

8. $\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{6}xy-\frac{1}{10}y^2$ restar $-\frac{3}{5}x^2+2y^2-\frac{3}{10}xy$.

9. $a^3+a^2-a+\frac{5}{6}$ restar $-\frac{7}{8}a^2+\frac{9}{10}a+\frac{7}{8}$.

10. $m^3+\frac{7}{12}mn^2-\frac{4}{7}n^3$ restar $-\frac{5}{21}m^2n+\frac{5}{9}mn^2+n^3-\frac{1}{3}$.

11. $\frac{3}{5}x^4+\frac{3}{4}x^3y-\frac{5}{7}xy^3+\frac{2}{3}y^4$ restar $x^4+\frac{5}{8}x^2y^2-\frac{1}{3}xy^3+\frac{5}{9}y^4$.

12. $\frac{1}{2}a+\frac{3}{5}b-\frac{7}{8}c+\frac{5}{9}d$ restar $-\frac{7}{20}b+\frac{1}{8}c-\frac{1}{9}d+\frac{7}{8}$.

EJERCICIO 25

Restar:

1. $\frac{5}{6}a^2$ de $\frac{3}{8}a^2-\frac{5}{6}a$.
2. $\frac{1}{2}a-\frac{3}{5}b$ de $8a+6b-5$.
3. $\frac{7}{9}x^2y$ de $x^3+\frac{2}{5}x^2y-6$.
4. $\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b+\frac{2}{3}c$ de $a+b-c$.
5. $m+n-p$ de $\frac{2}{3}m+\frac{5}{6}n+\frac{1}{2}p$.
6. $\frac{5}{6}a^3-\frac{7}{8}ab^2+6$ de $\frac{5}{8}a^2b+\frac{1}{4}ab^2-\frac{1}{5}$.
7. $-m^4+\frac{7}{8}m^2n^2-\frac{2}{9}mn^3$ de $\frac{2}{11}m^3n+\frac{5}{14}m^2n^2+\frac{1}{3}mn^3-6$.
8. $\frac{2}{9}+\frac{3}{7}x^3y^2-\frac{1}{8}xy^4-\frac{1}{2}x^5$ de $-\frac{7}{8}x^4y+\frac{1}{14}x^3y^2+\frac{2}{3}x^2y^3+\frac{1}{3}xy^4-7$.
9. $x^6-\frac{7}{9}x^4y^2+\frac{1}{11}x^2y^4-y^6+xy^5$ de $\frac{7}{9}x^5y+\frac{2}{3}x^4y^2-\frac{1}{8}x^3y^3-x^2y^4+xy^5+\frac{2}{13}y^6$.
10. $-\frac{1}{6}x^2y+\frac{3}{4}xy^2-\frac{2}{3}x^3+6$ de $\frac{5}{8}xy^2-\frac{7}{9}x^2y+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{11}y^3-\frac{2}{5}$.
11. $-\frac{2}{13}m^6+\frac{1}{2}n^6-\frac{7}{20}m^4n^2+\frac{5}{14}m^2n^4-\frac{3}{5}$ de $\frac{3}{10}m^4n^2-\frac{8}{7}m^2n^4+\frac{5}{9}n^6$.
12. $-\frac{5}{11}c^4d+\frac{3}{13}d^5-\frac{5}{6}c^3d^2+\frac{3}{4}cd^4$ de $\frac{3}{8}c^5+\frac{1}{2}c^2d^3-\frac{1}{3}d^5+\frac{7}{12}c^3d^2+\frac{7}{22}c^4d-35$.

EJERCICIO 26

Efectuar las restas siguientes y hallar el valor numérico del resultado para $a=1$, $b=2$, $c=3$, $x=4$, $y=5$, $m=\frac{3}{2}$, $n=\frac{2}{5}$.

De:

1. a^2-ab restar $3ab+b^2$.
2. a^3+b^3 restar $-5a^2b+6ab^2-2b^3$.
3. $\frac{1}{2}a$ restar $\frac{1}{2}b-\frac{5}{3}c+a$.
4. $3m^2-5n^2$ restar $m^2+8mn+10n^2$.
5. $x^4-18x^2y^2+15y^4$ restar $-16x^3y-6xy^3+9y^4$.
6. $a^3-7am^2+m^3$ restar $-5am^2+8a^2m-5m^3$.
7. $\frac{2}{3}a^2+\frac{7}{8}ab-\frac{1}{5}b^2$ restar $\frac{1}{4}a^2+ab-\frac{1}{10}b^2$.
8. $\frac{2}{3}m^2n+\frac{3}{4}mn^2-\frac{1}{2}n^3$ restar $-m^3-\frac{1}{6}m^2n-\frac{1}{4}mn^2-\frac{1}{2}n^3$.

Restar:

9. $a^4b^2-5a^3b^3$ de $a^6-3a^2b^4+b^6$.
10. $15ab$ de $-ab+10mn-8mx$.
11. $11a^2b-9ab^2+b^3$ de a^3.
12. $\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{64}x^4$.
13. $\frac{3}{4}x^3-\frac{3}{5}xy^2-\frac{1}{25}y^3$ de $x^3+\frac{3}{10}x^2y-\frac{2}{5}xy^2$.
14. $a^{x-1}-9a^{x-3}+a^{x-2}$ de $\frac{2}{5}a^{x-1}+a^x-\frac{5}{6}a^{x-3}+a^{x-2}$.

SUMA Y RESTA COMBINADAS

43 SUMA Y RESTA COMBINADAS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS

Ejemplos

(1) De a^2 restar la suma de $3ab-6$ y $3a^2-8ab+5$.

Efectuemos primero la suma:

$$\begin{array}{r} 3a^2-8ab+5 \\ 3ab-6 \\ \hline 3a^2-5ab-1 \end{array}$$

Esta suma, que es el sustraendo, hay que restarla de a^2 que es el minuendo, luego debajo de a^2 escribo $3a^2-5ab-1$ con los signos cambiados, y tendremos:

$$\begin{array}{r} a^2 \\ -3a^2+5ab+1 \\ \hline -2a^2+5ab+1. \end{array}$$

(2) De $x^3-4x^2y+5y^3$ restar la suma de $-x^3+5x^2y-6xy^2+y^3$ con $-6x^2y+9xy^2-16y^3$.

Efectuemos primero la suma:

$$\begin{array}{r} -x^3+5x^2y-6xy^2+y^3 \\ -6x^2y+9xy^2-16y^3 \\ \hline -x^3-x^2y+3xy^2-15y^3. \end{array}$$

Esta suma, que es el sustraendo, tengo que restarla de $x^3-4x^2y+5y^3$ que es el minuendo, luego debajo de este minuendo escribiré el sustraendo con los signos cambiados y tendremos:

$$\begin{array}{r} x^3-4x^2y \qquad +5y^3 \\ x^3+x^2y-3xy^2+15y^3 \\ \hline 2x^3-3x^2y-3xy^2+20y^3. \end{array}$$

(3) De la suma de x^3+4x^2-6 y $-5x^2-11x+5$ restar x^4-1.

Efectuemos la suma:

$$\begin{array}{r} x^3+4x^2 \qquad -6 \\ -5x^2-11x+5 \\ \hline x^3-x^2-11x-1 \end{array}$$

Esta suma es el minuendo, luego debajo de ella escribiré el sustraendo x^4-1 con los signos cambiados y tendremos:

$$\begin{array}{r} x^3-x^2-11x-1 \\ -x^4 \qquad\qquad +1 \\ \hline -x^4+x^3-x^2-11x \end{array}$$

EJERCICIO 27

1. De a^2 restar la suma de $ab+b^2$ con a^2-5b^2.
2. De 1 restar la suma de $a+8$ con $-a+6$.
3. De $-7x^2y$ restar la suma de $4xy^2-x^3$ con $5x^2y+y^3$.
4. De $5m^4$ restar la suma de $-3m^3n+4mn^2-n^3$ con $3m^3n-4mn^2+5n^3$.
5. De $6a$ restar la suma de $8a+9b-3c$ con $-7a-9b+3c$.
6. De $a+b-c$ restar la suma de $a-b+c$ con $-2a+b-c$.
7. De $m-n+p$ restar a suma de $-m+n-p$ con $2m-2n+2p$.
8. De $x^2-5ax+3a^2$ restar la suma de $9ax-a^2$ con $25x^2-9ax+7a^2$.
9. De a^3-1 restar la suma de $5a^2+6a-4$ con $2a^3-8a+6$.
10. De x^4-1 restar la suma de $5x^3-9x^2+4$ con $-11x^4-7x^3-6x$.
11. De a^3+b^3 restar la suma de $-7ab^2+35a^2b-11$ con $-7a^3+8ab^2-35a^2b+6$.
12. De n^5-7n^3+4n restar la suma de $-11n^4+14n^2-25n+8$ con $19n^3-6n^2+9n-4$.
13. De $a^4-8a^2m^2+m^4$ restar la suma de $-6a^3m+5am^3-6$ con $7a^4-11a^2m^2-5a^3m-6m^4$.
14. De $x^5-30x^3y^2+40xy^4+y^5$ restar la suma de $-4x^4y+13x^2y^3-9xy^4$ con $-6x^5+8x^3y^2+xy^4-2y^5$.
15. De la suma de $a+b$ con $a-b$ restar $2a-b$.
16. De la suma de $8x+9$ con $6y-5$ restar -2.
17. De la suma de x^2-6y^2 con $-7xy+40y^2$ restar $-9y^2+16$.
18. De la suma de $4a^2+8ab-5b^2$ con a^2+6b^2-7ab restar $4a^2+ab-b^2$.
19. De la suma de x^3-y^3 con $-14x^2y+5xy^2$ restar $-3x^3+19y^3$.
20. De la suma de $x^4-6x^2y^2+y^4$ con $8x^2y^2+31y^4$ restar $x^4+2x^2y^2+32y^4$.
21. De la suma de $n^4-6n^3+n^2$ con $7n^3-8n-n^2-6$ restar $-3n^4-n^5-8n^2+19$.
22. Restar $5a^4b-7a^2b^3+b^5$ de la suma de $a^5-3a^3b^2+6ab^4$ con $22a^4b+10a^3b^2-11ab^4-b^5$.
23. Restar $5-m^4$ de la suma de $-5m^2+4m^3-2m$ con $-7m^3+8m+4$.
24. Restar -4 de la suma de $7a^2-11ab+b^2$ con $-7a^2+11ab+b^2-8$.
25. Restar $a-b-2c$ de la suma de $3a-4b+5c$; $-7a+8b-11$; $-a+2b-7c$.
26. Restar a^4-3a^3+5 de la suma de $5a^3+14a^2-19a+8$; a^5+9a-1 y $-a^4+3a^2-1$.
27. Restar la suma de $m^4+10m^2n^2+15n^4$ con $-11m^3n-14m^2n^2-3mn^3+n^4$ de $6m^4+7m^3n+8mn^3-n^4$.
28. Restar la suma de $a^5+4a^3b^2+8ab^4-b^5$; $-7a^4b+15a^2b^3-25ab^4+3b^5$ y $-5ab^4+3a^2b^3-a^3b^2$ de $3a^5-6a^2b^3-21ab^4-6$.
29. Restar la suma de x^5+y^5 con $3x^4y+21x^3y^2+18x^2y^3-y^5$ de $x^5+32x^4y-26x^3y^2+18x^2y^3-2xy^4+y^5$.
30. Restar la suma de $3a^x+6a^{x-1}$ con $a^x-7a^{x-1}+a^{x-2}$ de $8a^{x+2}-7a^{x+1}-a^x+12a^{x-1}$.

(4) Restar la suma de $5x^4y^2+6x^2y^4-5y^6$ con $-3x^6+x^2y^4-11y^6$ de la suma de $x^6+2x^2y^4-y^6$ con $-4x^4y^2+3x^2y^4+3y^6$.

Efectuemos la primera suma que será el sustraendo:

$$\begin{array}{rrrr} & 5x^4y^2 & +6x^2y^4 & -5y^6 \\ -3x^6 & & +x^2y^4 & -11y^6 \\ \hline -3x^6 & +5x^4y^2 & +7x^2y^4 & -16y^6 \end{array}$$

Efectuemos la segunda suma que será el minuendo:

$$\begin{array}{rrrr} x^6 & & +2x^2y^4 & -y^6 \\ & -4x^4y^2 & +3x^2y^4 & +3y^6 \\ \hline x^6 & -4x^4y^2 & +5x^2y^4 & +2y^6 \end{array}$$

Como esta suma es el minuendo escribimos debajo de ella, con los signos cambiados, la suma anterior que es el sustraendo y tenemos:

$$\begin{array}{rrrr} x^6 & -4x^4y^2 & +5x^2y^4 & +2y^6 \\ 3x^6 & -5x^4y^2 & -7x^2y^4 & +16y^6 \\ \hline 4x^6 & -9x^4y^2 & -2x^2y^4 & +18y^6. \end{array}$$

EJERCICIO 28

1. De la suma de x^2+5 con $2x-6$ restar la suma de $x-4$ con $-x+6$.
2. De la suma de $3a-5b+c$ con $a-b-3c$ restar la suma de $7a+b$ con $-8b-3c$.
3. De la suma de x^3+1 con $5x^3+7-x^2$ restar la suma de $9x+4$ con $-3x^2-x+1$.
4. De la suma de a^2+1 con a^3-1 restar la suma de a^4+2 con $a-2$.
5. De la suma de $ab+bc+ac$ con $-7bc+8ac-9$ restar la suma de $4ac-3bc+5ab$ con $3bc+5ac-ab$.
6. De la suma de a^2x-3x^3 con a^3+3ax^2 restar la suma de $-5a^2x+11ax^2-11x^3$ con $a^3+8x^3-4a^2x+6ax^2$.
7. De la suma de x^4+x^2-3; $-3x+5-x^3$; $-5x^2+4x+x^4$ restar la suma de $-7x^3+8x^2-3x+4$ con x^4-3.
8. De la suma de m^4-n^4; $-7mn^3+17m^3n-4m^2n^2$ y $-m^4+6m^2n^2-80n^4$ restar la suma de $6-m^4$ con $-m^2n^2+mn^3-4$.
9. De la suma de $a-7+a^3$; $a^5-a^4-6a^2+8$; $-5a^2-11a+26$ restar la suma de $-4a^3+a^5-a^4$ con $-15+16a^3-8a^2-7a$.
10. Restar la suma de $3x^2-y^2$ con $-11xy+9y^2-14$ de la suma de $x^2-3xy-y^2$ con $9y^2-8xy+19x^2$.
11. Restar la suma de $a-1$ con $-a+1$ de la suma de a^2-3; $a-4$; $-3a+8$.
12. Restar la suma de a^2+b^2-ab; $7b^2-8ab+3a^2$; $-5a^2-17b^2+11ab$ de la suma de $3b^2-a^2+9ab$ con $-8ab-7b^2$.
13. Restar la suma de m^4-1; $-m^3+8m^2-6m+5$; $-7m-m^2+1$ de la suma de m^5-16 con $-16m^4+7m^2-3$.
14. Restar la suma de x^5-y^5; $-2x^4y+5x^3y^2-7x^2y^3-3y^5$; $6xy^4-7x^3y^2-8$ de la suma de $-x^3y^2+7x^4y+11xy^4$ con $-xy^4-1$.
15. Restar la suma de $7a^4-a^6-8a$; $-3a^5+11a^3-a^2+4$; $-6a^4-11a^3-2a+8$; $-5a^3+5a^2-4a+1$ de la suma de $-3a^4+7a^2-8a+5$ con $5a^5-7a^3+41a^2-50a+8$.
16. Restar la suma de $a^5-7a^3x^2+9$; $-20a^4x+21a^2x^3-19ax^4$; $x^5-7ax^4+9a^3x^2-80$ de la suma de $-4x^5+18a^3x^2-8$; $-9a^4x-17a^3x^2+11a^2x^3$; a^5+36.

44 SUMA Y RESTA COMBINADAS DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

(1) De $\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{5}b^2$ restar la suma de $\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{6}b^2-\frac{1}{8}ab$ con $-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{12}b^2-\frac{7}{8}ab$.

Efectuemos la suma que será el sustraendo: →

$$\begin{array}{rrr} \frac{3}{4}a^2 & -\frac{1}{8}ab & +\frac{1}{6}b^2 \\ -\frac{1}{8}a^2 & -\frac{7}{8}ab & +\frac{1}{12}b^2 \\ \hline \frac{5}{8}a^2 & -ab & +\frac{1}{4}b^2 \end{array}$$

Debajo del minuendo $\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{5}b^2$ escribimos el resultado de esta suma con los signos cambiados y tendremos:

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a^2 \qquad\quad -\frac{3}{5}b^2 \\ -\frac{5}{8}a^2+ab-\frac{1}{4}b^2 \\ \hline -\frac{1}{8}a^2+ab-\frac{17}{20}b^2. \quad \text{R.} \end{array}$$

(2) Restar la suma de $\frac{3}{5}m^3-\frac{1}{8}mn^2+6$ con $\frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{6}mn^2-\frac{3}{8}n^3$ de la suma de $\frac{2}{3}m^3+\frac{1}{2}n^3-\frac{2}{5}mn^2$ con $\frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{3}mn^2-\frac{1}{5}$.

Efectuamos la segunda suma que será el minuendo.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}m^3 \qquad\qquad -\frac{2}{5}mn^2+\frac{1}{2}n^3 \\ \frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{3}mn^2 \qquad\quad -\frac{1}{5} \\ \hline \frac{2}{3}m^3+\frac{3}{4}m^2n-\frac{1}{15}mn^2+\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{5} \end{array}$$

Efectuamos la primera suma que será el sustraendo:

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5}m^3 \qquad\qquad -\frac{1}{8}mn^2 \qquad +6 \\ \frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{6}mn^2-\frac{3}{8}n^3 \quad \\ \hline \frac{3}{5}m^3+\frac{3}{4}m^2n+\frac{1}{24}mn^2-\frac{3}{8}n^3+6 \end{array}$$

Ahora, de la primera suma restamos esta última suma y tendremos:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3}m^3+\frac{3}{4}m^2n-\frac{1}{15}mn^2+\frac{1}{2}n^3-\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5}m^3-\frac{3}{4}m^2n-\frac{1}{24}mn^2+\frac{3}{8}n^3-6 \\ \hline \frac{1}{15}m^3 \qquad\qquad -\frac{13}{120}mn^2+\frac{7}{8}n^3-\frac{31}{5}. \quad \text{R.} \end{array}$$

EJERCICIO 29

1. De $\frac{3}{4}a$ restar la suma de $a+\frac{1}{2}b$ con $-\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b$.
2. De $\frac{1}{2}a^3+\frac{3}{5}a^2$ restar la suma de $\frac{5}{8}a-6$ con $\frac{3}{8}a^2-\frac{5}{6}a^3$.
3. Restar $\frac{1}{5}a-\frac{1}{6}b$ de la suma de $a+3b$ con $6-\frac{2}{5}a-\frac{2}{3}b$.
4. Restar la suma de $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}-\frac{3}{7}x^2$ con $6-\frac{2}{9}x+\frac{1}{14}x^2$ de $-\frac{5}{6}x^3$.
5. De la suma de $\frac{7}{12}a^4$ con $-\frac{3}{7}a^3+\frac{2}{5}a^2-6$ restar $\frac{1}{5}a-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}a^4$.
6. Restar la suma de $-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{4}z$ con $3-\frac{2}{5}z-\frac{1}{9}y$ de $\frac{5}{9}y-\frac{2}{3}$.
7. De $\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{3}b^3$ restar la suma de $-\frac{3}{2}a^2b+\frac{3}{4}ab^2-b^3$ con $\frac{1}{8}a^2b-\frac{5}{6}ab^2+\frac{2}{3}b^3$.

8. De la suma de $\frac{1}{2}a-\frac{2}{9}b$ con $\frac{1}{3}b-\frac{3}{5}c$ restar la suma de $\frac{2}{9}b+\frac{1}{5}c$ con $-\frac{1}{10}c-\frac{5}{9}b$.
9. Restar la suma de $\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{5}$ con $-\frac{3}{4}a-\frac{3}{5}a^2-\frac{1}{10}$ de la suma de $\frac{1}{4}a^2-\frac{2}{3}a+\frac{1}{4}$ con $-\frac{29}{40}a^2+\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{8}$.
10. De la suma de $\frac{3}{5}x^2-\frac{5}{6}xy+\frac{2}{9}y^2$ con $-\frac{3}{2}xy-\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}$ restar la suma de $\frac{2}{9}x^2-\frac{2}{3}y^2+\frac{1}{6}xy$ con $\frac{17}{45}x^2-\frac{22}{9}xy-\frac{3}{2}y^2-\frac{1}{2}$.
11. Restar la suma de $\frac{3}{7}a^3-\frac{1}{5}b^3$ con $-\frac{3}{4}a^2b+\frac{3}{8}ab^2+\frac{1}{10}b^3$ de la suma de $\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{4}ab^2-\frac{1}{5}$ con $-\frac{5}{4}a^2b+\frac{1}{8}ab^2-\frac{3}{2}b^3-\frac{1}{2}$.
12. De $\frac{5}{14}m^4-\frac{2}{3}n^4$ restar la suma de $\frac{1}{3}m^2n^2-\frac{1}{4}mn^3-n^4$; $\frac{2}{7}m^4+\frac{3}{5}m^3n-\frac{3}{5}m^2n^2+\frac{5}{8}n^4$ con $\frac{1}{14}m^4-\frac{7}{20}m^3n+\frac{1}{4}m^2n^2-\frac{2}{3}n^4$.
13. De 5 restar la suma de $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$; $\frac{3}{4}y-\frac{1}{6}z$; $\frac{2}{5}z+\frac{1}{4}m$; $-\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n+\frac{3}{8}$.
14. Restar $\frac{1}{5}-\frac{1}{12}a^3+a^4$ de la suma de $\frac{1}{2}a^3-\frac{3}{5}a+\frac{5}{6}a^4$; $-\frac{5}{8}a+5-\frac{2}{3}a^2$; $-\frac{3}{4}a^3+\frac{1}{6}a^2-\frac{2}{3}$; $-\frac{3}{8}a^4+\frac{1}{6}a^3+\frac{59}{40}a+\frac{8}{11}$.

EJERCICIO 30

1. Hallar la expresión que sumada con x^3-x^2+5 da $3x-6$.
2. Hallar la expresión que sumada con $-5a+9b-6c$ da $8x+9$.
3. ¿Qué expresión sumada con a^3-b^3 da $-8a^2b+5ab^2-4b^3$?
4. Para obtener como resto $x-5$, ¿qué expresión debe restarse de x^3-4x^2+8?
5. ¿Qué expresión hay que restar de $m^4-3mn^3+6n^4$ para que la diferencia sea $4m^2n^2-8$?
6. Si $4x^3-9x+6$ es el resto y $5x^2+4x-8$ el sustraendo, ¿cuál es el minuendo?
7. ¿De qué expresión se ha restado a^3-b^3 si la diferencia ha sido $4a^3+8ab^2-11$?
8. Siendo el sustraendo $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$, ¿cuál ha de ser el minuendo para que la diferencia sea -4?
9. ¿Qué expresión hay que sumar con $-7xy+5x^2-8y^2$ para que la suma sea 1?
10. Si $9m^3-8m^2n+5mn^2-n^3$ se resta de n^3, ¿qué expresión hay que sumar a la diferencia para obtener m^3?
11. Si a^3-5a+8 es el sustraendo de una diferencia y el resto es $-a^3+5a-8$, ¿de qué expresión se ha restado la primera?

ES DE MILETO (640-535 A. C.). El primero famoso de los siete sabios de Grecia. Su vida avuelta en la bruma de la leyenda. Fue el pri- lósofo jónico. Recorrió Egipto, donde hizo es- poniéndose en contacto de esto modo con los misterios de la religión egipcia. Se le atribuye el haber predicho el eclipse de Sol ocurrido en el año 585. También se le atribuye el haber realizado la medición de las pirámides, mediante las sombras que proyectan. Fue el primero en dar una explicación de los eclipses.

CAPITULO III

SIGNOS DE AGRUPACION

45 Los **signos de agrupación** o **paréntesis** son de cuatro clases: el **paréntesis ordinario** ( ), el **paréntesis angular** o **corchete** [ ], las **llaves** { } y el **vínculo** o **barra** ——.

46 USO DE LOS SIGNOS DE AGRUPACION

Los signos de agrupación se emplean para indicar que las cantidades encerradas en ellos deben considerarse como un todo, o sea, como una sola **cantidad**.

Así, $a+(b-c)$, que equivale a $a+(+b-c)$, indica que la diferencia $b-c$ debe sumarse con a, y ya sabemos que para efectuar esta suma escribimos a continuación de a las demás **cantidades con su propio signo** y tendremos:

$$a+(b-c)=a+b-c.$$

La expresión $x+(-2y+z)$ indica que a x hay que sumarle $-2y+z$; luego, a continuación de x, escribimos $-2y+z$ con sus propios signos y tendremos:

$$x+(-2y+z)=x-2y+z.$$

Vemos, pues, que hemos **suprimido el paréntesis precedido del signo +, dejando a cada una de las cantidades que estaban dentro de él con su propio signo.**

La expresión

$$a-(b+c), \text{ que equivale a } a-(+b+c),$$

indica que de a hay que restar la suma $b+c$ y como para restar escribimos el **sustraendo con los signos cambiados** a continuación del minuendo, tendremos:

$$a-(b+c)=a-b-$$

La expresión $x-(-y+z)$ indica que de x hay que restar $-y+z$; luego, cambiando los signos al sustraendo, tendremos:

$$x-(-y+z)=x+y-$$

Vemos, pues, que hemos **suprimido el paréntesis precedido del signo −, cambiando el signo a cada una de las cantidades** que estaban encerradas en el paréntesis.

El **paréntesis angular** [ ], las **llaves** { } y el **vínculo** o **barra** —— tienen la misma significación que el paréntesis ordinario y se suprimen del mismo modo.

Se usan estos signos, que tienen distinta forma pero igual significación, para mayor claridad en los casos en que una expresión que ya tiene uno o más signos de agrupación se incluye en otro signo de agrupación.

I. SUPRESION DE SIGNOS DE AGRUPACION

47 REGLA GENERAL PARA SUPRIMIR SIGNOS DE AGRUPACION

1) **Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo + se deja el mismo signo que tengan a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.**

2) **Para suprimir signos de agrupación precedidos del signo − se cambia el signo a cada una de las cantidades que se hallan dentro de él.**

Ejemplos

(1) Suprimir los signos de agrupación en la expresión:

$$a+(b-c)+2a-(a+b).$$

Esta expresión equivale a

$$+a(+b-c)+2a-(+a+b).$$

Como el primer paréntesis va precedido del signo + lo suprimimos dejando a las cantidades que se hallan dentro con su propio signo y como el segundo paréntesis va precidido del signo − lo suprimimos cambiando el signo a las cantidades que se hallan dentro y tendremos:

$$a+(b-c)+2a-(a+b)=a+b-c+2a-a-b=2a-c. \quad \text{R.}$$

(2) Suprimir los signos de agrupación en $5x+(-x-y)-[-y+4x]+\{x-6\}$.

El paréntesis y las llaves están precedidos del signo +, luego los suprimimos dejando las cantidades que se hallan dentro con su propio signo y como el corchete va precedido del signo −, lo suprimimos cambiando el signo a las cantidades que se hallan dentro, y tendremos:

$$\begin{aligned} &5x+(-x-y)-[-y+4x]+\{x-\\ &=5x-x-y+y-4x+x-6\\ &=x-6. \quad \text{R.}\end{aligned}$$

(3) Simplificar $m + \overline{4n - 6} + 3m - \overline{n + 2m - 1}$.

El vínculo o barra equivale a un paréntesis que encierra a las cantidades que se hallan debajo de él y su signo es el signo de la primera de las cantidades que están debajo de él.

Así, la expresión anterior equivale a: $m + (4n - 6) + 3m - (n + 2m - 1)$.

Suprimiendo los vínculos, tendremos:

$$\begin{aligned} & m + \overline{4n - 6} + 3m - \overline{n + 2m - 1} \\ &= m + 4n - 6 + 3m - n - 2m + 1 \\ &= 2m + 3n - 5. \quad \text{R.} \end{aligned}$$

EJERCICIO 31

Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $x-(x-y)$.
2. $x^2+(-3x-x^2+5)$.
3. $a+b-(-2a+3)$.
4. $4m-(-2m-n)$.
5. $2x+3y-\overline{4x+3y}$.
6. $a+(a-b)+(-a+b)$.
7. $a^2+[-b^2+2a^2]-[a^2-b^2]$.
8. $2a-\{-x+a-1\}-\{a+x-3\}$.
9. $x^2+y^2-(x^2+2xy+y^2)+[-x^2+y^2]$.
10. $(-5m+6)+(-m+5)-6$.
11. $x+y+\overline{x-y+z}-\overline{x+y-z}$.
12. $a-(b+a)+(-a+b)-(-a+2b)$.
13. $-(x^2-y^2)+xy+(-2x^2+3xy)-[-y^2+xy]$.
14. $8x^2+[-2xy+y^2]-\{-x^2+xy-3y^2\}-(x^2-3xy)$
15. $-(a+b)+(-a-b)-(-b+a)+(3a+b)$.

(4) Simplificar la expresión: $3a + \{-5x - [-a + (9x - \overline{a + x})]\}$.

Cuando unos signos de agrupación están incluidos dentro de otros, como en este ejemplo, se suprime uno en cada paso empezando por el *más interior*. Así, en este caso, suprimimos primero el vínculo y tendremos:

$$3a + \{-5x - [-a + (9x - a - x)]\}.$$

Suprimiendo el paréntesis, tenemos: $3a + \{-5x - [-a + 9x - a - x]\}$

Suprimiendo el corchete, tenemos: $3a + \{-5x + a - 9x + a + x\}$

Suprimiendo las llaves, tenemos: $3a - 5x + a - 9x + a + x$.

Reduciendo términos semejantes, queda: $5a - 13x$. R.

(5) Simplificar la expresión:

$$-[-3a - \{b + [-a + (2a - b) - (-a + b)] + 3b\} + 4a].$$

Empezando por los más interiores que son los paréntesis ordinarios, tenemos:

$$\begin{aligned} & -[-3a - \{b + [-a + 2a - b + a - b] + 3b\} + 4a] \\ &= -[-3a - \{b - a + 2a - b + a - b + 3b\} + 4a] \\ &= -[-3a - b + a - 2a + b - a + b - 3b + 4a] \\ &= 3a + b - a + 2a - b + a - b + 3b - 4a \\ &= a + 2b. \quad \text{R.} \end{aligned}$$

EJERCICIO 32

Simplificar, suprimiendo los signos de agrupación y reduciendo términos semejantes:

1. $2a+[a-(a+b)]$.
2. $3x-[x+y-\overline{2x+y}]$.
3. $2m-[(m-n)-(m+n)]$.
4. $4x^2+[-(x^2-xy)+(-3y^2+2xy)-(-3x^2+y^2)]$.
5. $a+\{(-2a+b)-(-a+b-c)+a\}$.
6. $4m-[2m+\overline{n-3}]+[-4n-\overline{2m+1}]$.
7. $2x+[-5x-(-2y+\{-x+y\})]$.
8. $x^2-\{-7xy+[-y^2+(-x^2+3xy-2y^2)]\}$.
9. $-(a+b)+[-3a+b-\{-2a+b-(a-b)\}+2a]$.
10. $(-x+y)-\{4x+2y+[-x-y-\overline{x+y}]\}$.
11. $-(-a+b)+[-(a+b)-(-2a+3b)+(-b+a-b)]$.
12. $7m^2-\{-[m^2+3n-(5-n)-(-3+m^2)]\}-(2n+3)$.
13. $2a-(-4a+b)-\{-[-4a+(b-a)-(-b+a)]\}$.
14. $3x-(5y+[-2x+\{y-\overline{6+x}\}-(-x+y)])$.
15. $6c-[-(2a+c)+\{-(a+c)-2a-\overline{a+c}\}+2c]$.
16. $-(3m+n)-[2m+\{-m+(2m-\overline{2n-5})\}-(n+6)]$.
17. $2a+\{-[5b+(3a-c)+2-(-a+b-\overline{c+4})]-(-a+b)\}$.
18. $-[-3x+(-x-\overline{2y-3})]+\{-(2x+y)+(-x-3)+2-\overline{x+y}\}$.
19. $-[-(-a)]-[+(-a)]+\{-[-b+c]-[+(-c)]\}$.
20. $-\{-[-(a+b)]\}-\{+[-(-b-a)]\}-\overline{a+b}$.
21. $-\{-[-(a+b-c)]\}-\{+[-(c-a+b)]\}+[-\{-a+(-b)\}]$.
22. $-[3m+\{-m-(n-\overline{m+4})\}+\{-(m+n)+(-2n+3)\}]$.
23. $-[x+\{-(x+y)-[-x+(y-z)-(-x+y)]-y\}]$.
24. $-[-a+\{-a+(a-b)-\overline{a-b+c}-[-(-a)+b]\}]$.

II. INTRODUCCION DE SIGNOS DE AGRUPACION

(48) Sabemos que ⟶ $a + (-b + c) = a - b + c$

luego, recíprocamente: ⟶ $a - b + c = a + (-b + c)$.

Hemos visto también que ⟶ $a - (b - c) = a - b + c$

luego, recíprocamente: ⟶ $a - b + c = a - (b - c)$.

Del propio modo, ⟶ $a + b - c - d - e = a + (b - c) - (d +$

Lo anterior nos dice que los términos de una expresión pueden agruparse de cualquier modo.

Esta es la **Ley Asociativa** de la suma y de la resta.

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

(49) REGLA GENERAL PARA INTRODUCIR CANTIDADES EN SIGNOS DE AGRUPACION

1) **Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo + se deja a cada una de las cantidades con el mismo signo que tengan.**

2) **Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo − se cambia el signo a cada una de las cantidades que se incluyen en él.**

Ejemplos

(1) Introducir los tres últimos términos de la expresión: x^3-2x^2+3x-4 en un paréntesis precedido del signo $+$.

Dejamos a cada cantidad con el signo que tiene y tendremos: $x^3+(-2x^2+3x-4)$. R.

(2) Introducir los tres últimos términos de la expresión: $x^2-a^2+2ab-b^2$ en un paréntesis precedido del signo $-$.

Cambiamos el signo a cada una de las tres últimas cantidades y tendremos: $x^2-(a^2-2ab+b^2)$. R.

EJERCICIO 33

Introducir los tres últimos términos de las expresiones siguientes dentro de un paréntesis precedido del signo $+$:

1. $a-b+c-d$.
2. $x^2-3xy-y^2+6$.
3. x^3+4x^2-3x+1.
4. $a^3-5a^2b+3ab^2-b^3$.
5. $x^4-x^3+2x^2-2x+1$.

Introducir los tres últimos términos de las expresiones siguientes dentro de un paréntesis precedido del signo $-$:

6. $2a+b-c+d$.
7. x^3+x^2+3x-4.
8. $x^3-5x^2y+3xy^2-y^3$.
9. $a^2-x^2-2xy-y^2$.
10. $a^2+b^2-2bc-c^2$.

(3) Introducir todos los términos menos el primero, de la expresión $3a+2b-(a+b)-(-2a+3b)$ en un paréntesis precedido del signo $-$.

Cambiaremos el signo a $2b$ y pondremos $-2b$, y cambiaremos los signos que están delante de los paréntesis, porque cambiando estos signos cambian los signos de las cantidades encerradas en ellas, y tendremos:

$$3a-[-2b+(a+b)+(-2a+3b)].$$

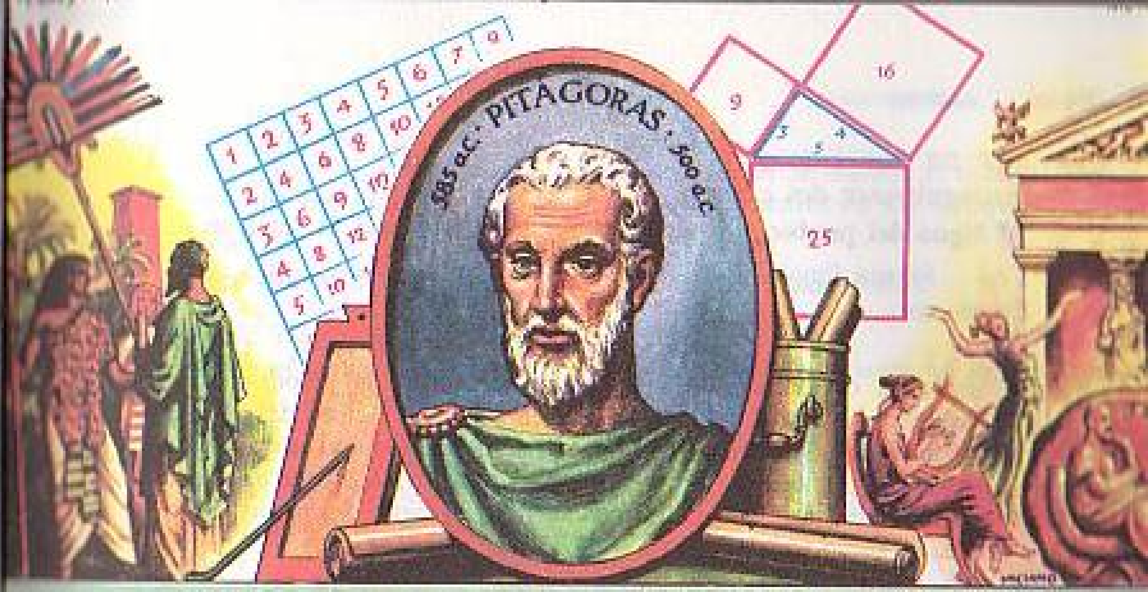
EJERCICIO 34

Introducir todos los términos, menos el primero, de las expresiones siguientes, en un paréntesis precedido del signo $-$:

1. $x+2y+(x-y)$.
2. $4m-2n+3-(-m+n)+(2m-n)$.
3. $x^2-3xy+[(x^2-xy)+y^2]$.
4. $x^3-3x^2+[-4x+2]-3x-(2x+3)$.
5. $2a+3b-\{-2a+[a+(b-a)]\}$.

Introducir las expresiones siguientes en un paréntesis precedido del signo $-$:

6. $-2a+(-3a+b)$.
7. $2x^2+3xy-(y^2+xy)+(-x^2+y^2)$.
8. $x^3-[-3x^2+4x-2]$.
9. $[m^4-(3m^2+2m+3)]+(-2m+3)$.



PITAGORAS (585-500) A. C.). Célebre filósofo griego nacido en Samos y muerto en Metaponte. Después de realizar sus primeros estudios en su ciudad natal viajó por Egipto y otros países de Oriente. A su regreso fundó la Escuela de Crotona, que era una sociedad secreta de tipo político-religioso, la alcanzó gran preponderancia. Fue el primero en locar a la base de las especulaciones filosóficas, conceptos fundamentales de la matemática. H del número el principio universal por excelen

CAPITULO IV

MULTIPLICACION

50 **LA MULTIPLICACION es una operación que tiene por objeto, dadas dos cantidades llamadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera cantidad, llamada producto, que sea respecto del multiplicando, en valor absoluto y signo, lo que el multiplicador es respecto de la unidad positiva.**

El multiplicando y multiplicador son llamados factores del producto.

51 **El orden de los factores no altera el producto.** Esta propiedad, demostrada en Aritmética, se cumple también en Algebra.

Así, el producto ab puede escribirse ba; el producto abc puede escribirse también bac o acb.

Esta es la **Ley Conmutativa** de la multiplicación.

52 **Los factores de un producto pueden agruparse de cualquier modo.**

Así, en el producto $abcd$, tenemos: $abcd=a\times(bcd)=(ab)\times(cd)=(abc)\times d$.

Esta es la **Ley Asociativa** de la multiplicación.

53 LEY DE LOS SIGNOS

Distinguiremos dos casos:

1) **Signo del producto de dos factores.** En este caso, la regla es:

Signos iguales dan + y signos diferentes dan −

En efecto:

1. $$(+a) \times (+b) = +ab,$$

porque según la definición de multiplicar, el signo del producto tiene que ser respecto del signo del multiplicando lo que el signo del multiplicador es respecto de la **unidad positiva,** pero en este caso, el multiplicador tiene el **mismo signo** que la unidad positiva; luego, el producto necesita tener el **mismo signo** que el multiplicando, pero el signo del multiplicando es +, luego, el signo del producto será +.

2. $$(-a) \times (+b) = -ab,$$

porque teniendo el multiplicador el **mismo signo** que la unidad positiva, el producto necesita tener el mismo signo que el multiplicando, pero éste tiene −, luego, el producto tendrá −.

3. $$(+a) \times (-b) = -ab,$$

porque teniendo el multiplicador **signo contrario** a la unidad positiva, el producto tendrá **signo contrario** al multiplicando, pero el multiplicando tiene +, luego, el producto tendrá −.

4. $$(-a) \times (-b) = +ab,$$

porque teniendo el multiplicador **signo contrario** a la unidad positiva, el producto ha de tener **signo contrario** al mulitplicando; pero éste tiene −, luego, el producto tendrá +.

Lo anterior podemos resumirlo diciendo que →
+ por + da +.
− por − da +.
+ por − da −.
− por + da −.

2) **Signo del producto de más de dos factores.** En este caso, la regla es:

a) El signo del producto de varios factores es + cuando tiene un número par de factores negativos o ninguno.

Así, $$(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = abcd$$

En efecto: Según se demostró antes, el signo del producto de dos factores negativos es +; luego, tendremos:

$$(-a) \times (-b) \times (-c) \times (-d) = (-a.-b) \times (-c.-d) = (+ab) \times (+cd) = abcd.$$

b) El signo del producto de varios factores es − cuando tiene un número impar de factores negativos.

Así, $$(-a) \times (-b) \times (-c) = -abc.$$

En efecto:

$$(-a) \times (-b) \times (-c) = [(-a) \times (-b)] \times (-c) = (+ab) \times (-c) = -abc.$$

54 LEY DE LOS EXPONENTES

Para multiplicar potencias de la misma base se escribe la misma base y se le pone por exponente la suma de los exponentes de los factores.

Así, $$a^4 \times a^3 \times a^2 = a^{4+3+2} = a^9.$$

En efecto: $a^4 \times a^3 \times a^2 = aaaa \times aaa \times aa = aaaaaaaaa = a^9.$

55 LEY DE LOS COEFICIENTES

El coeficiente del producto de dos factores es el producto de los coeficientes de los factores.

Así, $$3a \times 4b = 12ab.$$

En efecto: Como el orden de factores no altera el producto, tendremos: → $3a \times 4b = 3 \times 4 \times a \times b = 1$

56 CASOS DE LA MULTIPLICACION

Distinguiremos tres casos: 1) Multiplicación de monomios. 2) Multiplicación de un polinomio por un monomio. 3) Multiplicación de polinomios.

I. MULTIPLICACION DE MONOMIOS

57 REGLA

Se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto se escriben las letras de los factores en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto vendrá dado por la Ley de los signos (53).

Ejemplos

(1) Multiplicar $2a^2$ por $3a^3$.

$$2a^2 \times 3a^3 = 2 \times 3a^{2+3} = 6a^5. \quad R.$$

El signo del producto es + porque + por + da +.

(2) Multiplicar $-xy^2$ por $-5mx^4y^3$

$$(-xy^2) \times (-5mx^4y^3) = 5mx^{1+4}y^{2+3} = 5mx^5y^5. \quad R.$$

El signo del producto es + porque − por − da +.

(3) Multiplicar $3a^2b$ por $-4b^2x$.

$$3a^2b \times (-4b^2x) = -3 \times 4a^2b^{1+2}x = -12a^2b^3x. \quad R.$$

El signo del producto es − porque + por − da −.

(4) Multiplicar $-ab^2$ por $4a^mb^nc^3$.

$$(-ab^2) \times 4a^mb^nc^3 = -1 \times 4a^{1+m}b^{2+n}c^3 = -4a^{m+1}b^{n+2}c^3. \quad R.$$

El signo del producto es − porque − por + da −.

EJERCICIO 35

Multiplicar:

1. 2 por −3.
2. −4 por −8.
3. −15 por 16.
4. ab por $-ab$.
5. $2x^2$ por $-3x$.
6. $-4a^2b$ por $-ab^2$.
7. $-5x^3y$ por xy
8. a^2b^3 por $3a^2x$

9. $-4m^2$ por $-5mn^2p$.
10. $5a^2y$ por $-6x^2$.
11. $-x^2y^3$ por $-4y^3z^4$.
12. abc por cd.
13. $-15x^4y^3$ por $-16a^2x^3$.
14. $3a^2b^3$ por $-4x^2y$.
15. $3a^2bx$ por $7b^3x^5$.
16. $-8m^2n^3$ por $-9a^2mx^4$.
17. a^mb^n por $-ab$.
18. $-5a^mb^n$ por $-6a^2b^3x$.
19. x^my^nc por $-x^my^nc^x$.
20. $-m^xn^a$ por $-6m^2n$.

(5) Multiplicar $a^{x+1}b^{x+2}$ por $-3a^{x+2}b^3$.

$$(a^{x+1}b^{x+2})\times(-3a^{x+2}b^3)=-3a^{x+1+x+2}b^{x+2+3}=-3a^{2x+3}b^{x+5}.\quad \text{R.}$$

(6) Multiplicar $-a^{m+1}b^{n-2}$ por $-4a^{m-2}b^{2n+4}$.

$$(-a^{m+1}b^{n-2})\times(-4a^{m-2}b^{2n+4})=4a^{2m-1}b^{3n+2}.\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 36

Multiplicar:

1. a^m por a^{m+1}.
2. $-x^a$ por $-x^{a+2}$.
3. $4a^nb^x$ por $-ab^{x+1}$.
4. $-a^{n+1}b^{n+2}$ por $a^{n+2}b^n$.
5. $-3a^{n+4}b^{n+1}$ por $-4a^{n+2}b^{n+3}$.
6. $3x^2y^3$ por $4x^{m+1}y^{m+2}$.
7. $4x^{a+2}b^{a+4}$ por $-5x^{a+5}b^{a+1}$.
8. a^mb^nc por $-a^mb^{2n}$.
9. $-x^{m+1}y^{a+2}$ por $-4x^{m-3}y^{a-5}c^2$.
10. $-5m^an^{b-1}c$ por $-7m^{2a-3}n^{b-4}$.

(7) Multiplicar $\frac{2}{3}a^2b$ por $-\frac{3}{4}a^3m$.

$$\left(\frac{2}{3}a^2b\right)\left(-\frac{3}{4}a^3m\right)=-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}a^5bm=-\frac{1}{2}a^5bm.\quad \text{R.}$$

(8) Multiplicar $-\frac{5}{6}x^2y^3$ por $-\frac{3}{10}x^my^{n+1}$

$$\left(-\frac{5}{6}x^2y^3\right)\left(-\frac{3}{10}x^my^{n+1}\right)=\frac{5}{6}\times\frac{3}{10}x^{m+2}y^{n+1+3}=\frac{1}{4}x^{m+2}y^{n+4}\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 37

Efectuar:

1. $\frac{1}{2}a^2$ por $\frac{4}{5}a^3b$.
2. $-\frac{3}{7}m^2n$ por $-\frac{7}{14}a^2m^3$.
3. $\frac{2}{3}x^2y^3$ por $-\frac{3}{5}a^2x^4y$.
4. $-\frac{1}{8}m^2n^3$ por $-\frac{4}{5}a^3m^2n$.
5. $-\frac{7}{8}abc$ por $\frac{2}{7}a^3$.
6. $-\frac{3}{5}x^3y^4$ por $-\frac{5}{6}a^2by^5$.
7. $\frac{1}{3}a$ por $\frac{3}{5}a^m$.
8. $-\frac{3}{4}a^m$ por $-\frac{2}{5}ab^3$.
9. $\frac{5}{6}a^mb^n$ por $-\frac{3}{10}ab^2c$.
10. $-\frac{2}{9}a^xb^{m+1}$ por $-\frac{3}{5}a^{x-1}b^m$.
11. $\frac{3}{8}a^mb^n$ por $-\frac{4}{5}a^{2m}b^n$.
12. $-\frac{2}{11}a^{x+1}b^{x-3}c^2$ por $-\frac{44}{7}a^{x-3}b^2$.

58 PRODUCTO CONTINUADO

Multiplicación de más de dos monomios.

Ejemplos

(1) Efectuar $(2a)(-3a^2b)(-ab^3)$.

$$(2a)(-3a^2b)(-ab^3)=6a^4b^4.\quad \text{R.}$$

El signo del producto es + porque hay un número par de factores negativos.

(2) Efectuar $(-x^2y)(-\frac{2}{3}x^m)(-\frac{3}{4}a^2y^n)$.

$$(-x^2y)\left(-\tfrac{2}{3}x^m\right)\left(-\tfrac{3}{4}a^2y^n\right)=-\tfrac{1}{2}a^2x^{m+2}y^{n+1}.\quad \text{R.}$$

El signo del producto es − porque tiene un número impar de factores negativos.

EJERCICIO 38

Multiplicar:

1. $(a)(-3a)(a^2)$.
2. $(3x^2)(-x^3y)(-a^2x)$.
3. $(-m^2n)(-3m^2)(-5mn^3)$.
4. $(4a^2)(-5a^3x^2)(-ay^2)$.
5. $(-a^m)(-2ab)(-3a^2b^x)$.
6. $(\frac{1}{2}x^3)(-\frac{2}{3}a^3x)(-\frac{3}{5}a^4m)$.
7. $(\frac{2}{3}a^m)(\frac{3}{4}a^2b^4)(-3a^4b^{x+1})$.
8. $(-\frac{3}{5}m^3)(-5a^2m)(-\frac{1}{10}a^xm^a)$.
9. $(2a)(-a^2)(-3a^3)(4a)$.
10. $(-3b^2)(-4a^3b)(ab)(-5a^2x)$.
11. $(a^mb^x)(-a^2)(-2ab)(-3a^2x)$.
12. $(-\frac{1}{2}x^2y)(-\frac{3}{5}xy^2)(-\frac{10}{3}x^3)(-\frac{3}{4}x^2y)$.

II MULTIPLICACION DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

59 Sea el producto $(a+b)c$.

Multiplicar $(a+b)$ por c equivale a tomar la suma $(a+b)$ como sumando c veces; luego:

$$\begin{aligned}(a+b)c&=(a+b)+(a+b)+(a+b)\ldots\ldots c \text{ veces}\\&=(a+a+a\ldots\ldots c\text{ veces})+(b+b+b\ldots\ldots c\text{ veces})\\&=ac+bc.\end{aligned}$$

Sea el producto $(a-b)c$.

Tendremos:
$$\begin{aligned}(a-b)c&=(a-b)+(a-b)+(a-b)\ldots\ldots c\text{ veces}\\&=(a+a+a\ldots c\text{ veces})-(b+b+b\ldots c\text{ veces})\\&=ac-bc.\end{aligned}$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

60 REGLA PARA MULTIPLICAR UN POLINOMIO POR UN MONOMIO

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso la regla de los signos, y se separan los productos parciales con sus propios signos.

Esta es la Ley Distributiva de la multiplicación.

Ejemplos

(1) Multiplicar $3x^2-6x+7$ por $4ax^2$.

Tendremos: $(3x^2-6x+7)\times 4ax^2=3x^2(4ax^2)-6x(4ax^2)+7(4ax^2)$
$=12ax^4-24ax^3+28ax^2.$ R.

La operación suele disponerse así:

$$\begin{array}{r}3x^2-6x+7\\4ax^2\\\hline 12ax^4-24ax^3+28ax^2\end{array}$$

(2) Multiplicar $a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4$ por $-2a^2x$.

$$\begin{array}{r} a^3x - 4a^2x^2 + 5ax^3 - x^4 \\ -2a^2x \\ \hline -2a^5x^2 + 8a^4x^3 - 10a^3x^4 + 2a^2x^5. \end{array} \quad R.$$

(3) Multiplicar $x^{a+1}y - 3x^ay^2 + 2x^{a-1}y^3 - x^{a-2}y^4$ por $-3x^2y^m$.

$$\begin{array}{l} x^{a+1}y - 3x^ay^2 + 2x^{a-1}y^3 - x^{a-2}y^4 \\ -3x^2y^m \\ \hline -3x^{a+3}y^{m+1} + 9x^{a+2}y^{m+2} - 6x^{a+1}y^{m+3} + 3x^ay^{m+4}. \end{array} \quad R.$$

EJERCICIO 39

Multiplicar:

$3x^3 - x^2$ por $-2x$.
$8x^2y - 3y^2$ por $2ax^3$.
$x^2 - 4x + 3$ por $-2x$.
$a^3 - 4a^2 + 6a$ por $3ab$.
$a^2 - 2ab + b^2$ por $-ab$.
$x^5 - 6x^3 - 8x$ por $3a^2x^2$.
$m^4 - 3m^2n^2 + 7n^4$ por $-4m^3x$.
$x^3 - 4x^2y + 6xy^2$ por ax^3y.
$a^3 - 5a^2b - 8ab^2$ por $-4a^4m^2$.

10. $a^m - a^{m-1} + a^{m-2}$ por $-2a$.
11. $x^{m+1} + 3x^m - x^{m-1}$ por $3x^{2m}$.
12. $a^mb^n + a^{m-1}b^{n+1} - a^{m-2}b^{n+2}$ por $3a^2b$.
13. $x^3 - 3x^2 + 5x - 6$ por $-4x^2$.
14. $a^4 - 6a^3x + 9a^2x^2 - 8$ por $3bx^3$.
15. $a^{n+3} - 3a^{n+2} - 4a^{n+1} - a^n$ por $-a^nx^2$.
16. $x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 7x + 5$ por $-3a^2x^3$.
17. $-3x^3 + 5x^2y - 7xy^2 - 4y^3$ por $5a^2xy^2$.
18. $x^{a+5} - 3x^{a+4} + x^{a+3} - 5x^{a+1}$ por $-2x^2$.
19. $a^8 - 3a^6b^2 + a^4b^4 - 3a^2b^6 + b^8$ por $-5a^3y^2$.
20. $a^mb^n + 3a^{m-1}b^{n+2} - a^{m-2}b^{n+4} + a^{m-3}b^{n+6}$ por $4a^mb^3$.

(4) Multiplicar $\frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6$ por $-\frac{2}{9}a^2x^3y^2$.

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3}x^4y^2 - \frac{3}{5}x^2y^4 + \frac{5}{6}y^6 \\ -\frac{2}{9}a^2x^3y^2 \\ \hline -\frac{4}{27}a^2x^7y^4 + \frac{2}{15}a^2x^5y^6 - \frac{5}{27}a^2x^3y^8. \end{array} \quad R.$$

EJERCICIO 40

Multiplicar:

$\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b$ por $\frac{2}{5}a^2$.
$\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b$ por $-\frac{2}{3}a^3b$.
$\frac{3}{5}a - \frac{1}{6}b + \frac{2}{5}c$ por $-\frac{5}{3}ac^2$.
$\frac{2}{5}a^2 + \frac{1}{3}ab - \frac{2}{9}b^2$ por $3a^2x$.
$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2$ por $\frac{3}{2}y^3$.

6. $3a - 5b + 6c$ por $-\frac{3}{10}a^2x^3$.
7. $\frac{2}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{3}y^4$ por $\frac{3}{7}x^3y^4$.
8. $\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y^2$ por $-\frac{5}{8}a^2m$.
9. $\frac{2}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{5}{6}mn^2 - \frac{1}{9}n^3$ por $\frac{3}{4}m^2n^3$.
10. $\frac{2}{5}x^6 - \frac{1}{3}x^4y^2 + \frac{3}{5}x^2y^4 - \frac{1}{10}y^6$ por $-\frac{5}{7}a^3x^4y^3$.

III. MULTIPLICACION DE POLINOMIOS POR POLINOMIOS

(61) Sea el producto $(a + b - c)(m + n)$.

Haciendo $m + n = y$ tendremos:

$$(a + b - c)(m + n) = (a + b - c)y = ay + by - cy$$

(sustituyendo y por su valor $m + n$)

$$= a(m + n) + b(m + n) - c(m + n)$$
$$= am + an + bm + bn - cm - cn$$
$$= am + bm - cm + an + bn - cn$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

(62) **REGLA PARA MULTIPLICAR DOS POLINOMIOS**

Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la Ley de los signos, y se reducen los términos semejantes.

Ejemplos

(1) Multiplicar $a - 4$ por $3 + a$.

Los dos factores deben ordenarse con relación a una misma letra.

Tendremos:

$$\begin{array}{r} a - 4 \\ a + 3 \\ \hline a(a) - 4(a) \\ + 3(a) - 3(4) \end{array} \quad \text{o sea} \quad \begin{array}{r} a - 4 \\ a + 3 \\ \hline a^2 - 4a \\ 3a - 12 \\ \hline a^2 - a - 12. \end{array} \quad R.$$

Hemos multiplicado el primer término del multiplicador a por los dos términos del multiplicando y el segundo término del multiplicador 3 por los dos términos del multiplicando, escribiendo los productos parciales de modo que los términos semejantes queden en columna y hemos reducido los términos semejantes.

(2) Multiplicar $4x - 3y$ por $-2y + 5x$.

Ordenando en orden descendente con relación a la x tendremos:

$$\begin{array}{r} 4x - 3y \\ 5x - 2y \\ \hline 4x(5x) - 3y(5x) \\ - 4x(2y) + 3y(2y) \end{array} \quad \text{o sea} \quad \begin{array}{r} 4x - 3y \\ 5x - 2y \\ \hline 20x^2 - 15xy \\ - 8xy + 6y^2 \\ \hline 20x^2 - 23xy + 6y^2. \end{array} \quad R.$$

EJERCICIO 41

Multiplicar:

1. $a + 3$ por $a - 1$.
2. $a - 3$ por $a + 1$.
3. $x + 5$ por $x - 4$.
4. $m - 6$ por $m - 5$.
5. $-x + 3$ por $-x + 5$.
6. $-a - 2$ por $-a - 3$.
7. $3x - 2y$ por $y + 2x$.
8. $-4y + 5x$ por $-3x + 2y$.
9. $5a - 7b$ por $a + 3b$.
10. $7x - 3$ por $4 + 2x$.
11. $-a + b$ por $-4b + 8a$.
12. $6m - 5n$ por $-n + m$.
13. $8n - 9m$ por $4n + 6m$.
14. $-7y - 3$ por $-11 + 2y$.

(3) Multiplicar $2+a^2-2a-a^3$ por $a+1$.

Ordenando en orden ascendente con relación a la a tendremos:

$$\begin{array}{l}
2-2a+a^2-a^3\\
1+a\\
\hline
2-2a+a^2-a^3\\
\quad\; 2a-2a^2+a^3-a^4\\
\hline
2 \qquad\quad -a^2 \qquad -a^4. \quad R.
\end{array}$$

(4) Multiplicar $6y^3+2x^3-5xy$ por $3x^3-4y^2+2xy$.

Ordenando en orden descendente con relación a la x tendremos:

$$\begin{array}{l}
2x^2-5xy+6y^2\\
3x^2+2xy-4y^2\\
\hline
6x^4-15x^3y+18x^2y^2\\
\qquad 4x^3y-10x^2y^2+12xy^3\\
\qquad\qquad -8x^2y^2+20xy^3-24y^4\\
\hline
6x^4-11x^3y \qquad +32xy^3-24y^4. \quad R.
\end{array}$$

(5) Multiplicar $x-4x^2+x^3-3$ por x^3-1+4x^2.

Ordenando en orden descendente con relación a x, tendremos:

$$\begin{array}{l}
x^3-4x^2+x-3\\
x^3+4x^2-1\\
\hline
x^6-4x^5+\quad x^4-3x^3\\
\qquad 4x^5-16x^4+4x^3-12x^2\\
\qquad\qquad\quad -x^3+\;4x^2-x+3\\
\hline
x^6 \qquad -15x^4 \qquad -8x^2-x+3. \quad R.
\end{array}$$

(6) Multiplicar $2x-y+3z$ por $x-3y-4z$

$$\begin{array}{l}
2x-y+3z\\
x-3y-4z\\
\hline
2x^2-xy+3xz\\
\quad -6xy \qquad +3y^2-9yz\\
\qquad\quad -8xz \qquad +4yz-12z^2\\
\hline
2x^2-7xy-5xz+3y^2-5yz-12z^2. \quad R.
\end{array}$$

EJERCICIO 42

Multiplicar:

1. x^2+xy+y^2 por $x-y$.
2. a^2+b^2-2ab por $a-b$.
3. a^2+b^2+2ab por $a+b$.
4. x^3-3x^2+1 por $x+3$.
5. a^3-a+a^2 por $a-1$.
6. $m^4+m^2n^2+n^4$ por m^2-n^2.
7. x^3-2x^2+3x-1 por $2x+3$.
8. $3y^3+5-6y$ por y^2+2.
9. m^3-m^2+m-2 por $am+a$.
10. $3a^2-5ab+2b^2$ por $4a-5b$.
11. $5m^4-3m^2n^2+n^4$ por $3m-n$.
12. a^2+a+1 por a^2-a-1.
13. x^3+2x^2-x por x^2-2x+5.
14. $m^3-3m^2n+2mn^2$ por $m^2-2mn-8n^2$.
15. x^2+1+x por x^2-x-1.
16. $2-3x^2+x^4$ por x^2-2x+3.
17. m^3-4m+m^2-1 por m^3+1.
18. a^3-5a+2 por a^2-a+5.
19. $x^2-2xy+y^2$ por $xy-x^2+3y^2$.
20. n^2-2n+1 por n^2-1.
21. $a^3-3a^2b+4ab^2$ por $a^2b-2ab^2-10b^3$.
22. $8x^3-9y^3+6xy^2-12x^2y$ por $2x+3y$.
23. $2y^3+y-3y^2-4$ por $2y+5$.
24. $3x^3-a^3+2ax^2$ por $2a^2-x^2-3ax$.

25. $x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3$ por $-y^2-xy-x^2$.
26. $2a-5a^2+a^3-3$ por a^3-2a-7.
27. $m^4+3-m^2+m^3$ por m^2-2m+3.
28. $a^4-3a^2b^2+a^3b-ab^3+b^4$ por $a^2-2ab+b^2$.
29. $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$ por x^2-2y^2+xy.
30. y^2-2y+1 por y^4-2y^2+2.
31. m^4-3m^2+4 por $3m^3-2m+1$.
32. a^3-a+a^2+1 por a^2+a^3-2a-1.
33. $8x^3-12x^2y-6xy^2+y^3$ por $3x^2+4y^2-2xy$.
34. $5a^4-3a+2a^2-4a^3-1$ por a^4-2a^2+2.
35. $x^4-x^3+x^2-x+1$ por x^3-2x^2+3x+6.
36. $3a^3-5a+2a^2-4$ por a^2+a^3-2a+1.
37. $5y^4-3y^3+4y^2+2y$ por y^4-3y^2-1.
38. $m^4-2m^3n+3m^2n^2-4n^4$ por $n^3-5mn^2+3m^2n-m^3$.
39. $x^6-3x^4y^2-x^2y^4+y^6$ por $x^5-2x^3y^2+3xy^4$.
40. $3a^5-6a^3+2a^2-3a+2$ por a^4-3a^2+4a-5.
41. $a+b-c$ por $a-b+c$.
42. $x+2y-z$ por $x-y+z$.
43. $2x-3y+5z$ por $y+2z-x$.
44. $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$ por $x+y+z$.

63 MULTIPLICACION DE POLINOMIOS CON EXPONENTES LITERALES

Ejemplos

(1) Multiplicar $a^{m+2}-4a^m-2a^{m+1}$ por a^2-2a.

$$\begin{array}{l}
a^{m+2}-2a^{m+1}-4a^m\\
a^2 \quad\; -2a\\
\hline
a^{m+4}-2a^{m+3}-4a^{m+2}\\
\qquad\quad -2a^{m+3}+4a^{m+2}+8a^{m+1}\\
\hline
a^{m+4}-4a^{m+3} \qquad\qquad +8a^{m+1}
\end{array}$$

(2) Multiplicar $x^{a+2}-3x^a-x^{a+1}+x^{a-1}$ por $x^{a+1}+x^a+4x^{a-1}$.

$$\begin{array}{l}
x^{a+2}-x^{a+1}-3x^a+x^{a-1}\\
x^{a+1}+x^a+4x^{a-1}\\
\hline
x^{2a+3}-x^{2a+2}-3x^{2a+1}+x^{2a}\\
\qquad\quad x^{2a+2}-\;x^{2a+1}-3x^{2a}+\;x^{2a-1}\\
\qquad\qquad\qquad 4x^{2a+1}-4x^{2a}-12x^{2a-1}+4x^{2a-2}\\
\hline
x^{2a+3} \qquad\qquad\qquad -6x^{2a}-11x^{2a-1}+4x^{2a-2}. \quad R.
\end{array}$$

EJERCICIO 43

Multiplicar:

1. $a^x-a^{x+1}+a^{x+2}$ por $a+1$.
2. $x^{n+1}+2x^{n+2}-x^{n+3}$ por x^2+x.
3. $m^{a-1}+m^{a+1}+m^{a+2}-m^a$ por m^2-2m+3.
4. $a^{n+2}-2a^n+3a^{n+1}$ por a^n+a^{n+1}.
5. $x^{a+2}-x^a+2x^{a+1}$ por $x^{a+3}-2x^{a+1}$.
6. $3a^{x-2}-2a^{x-1}+a^x$ por a^2+2a-1.
7. $3a^{x-1}+a^x-2a^{x-2}$ por $a^x-a^{x-1}+a^{x-2}$.
8. $m^{a+1}-2m^{a+2}-m^{a+3}+m^{a+4}$ por $m^{a-3}-m^{a-1}+m^{a-2}$.
9. $x^{a-1}+2x^{a-2}-x^{a-3}+x^{a-4}$ por $-x^{a-3}+x^{a-1}-x^{a-2}$.
10. $a^nb-a^{n-1}b^2+2a^{n-2}b^3-a^{n-3}b^4$ por $a^nb^2-a^{n-2}b^4$.
11. a^x+b^x por a^m+b^m.
12. $a^{x-1}-b^{n-1}$ por $a-b$.
13. $a^{2m+1}-5a^{2m+2}+3a^{2m}$ por $a^{3m-3}+6a^{3m-1}-8a^{3m-2}$.
14. $x^{a+2}y^{x-1}+3x^ay^{x+1}-4x^{a+1}y^x$ por $-2x^{2a-1}y^{x-2}-10x^{2a-3}y^x-4x^{2a-2}y^{x-1}$.

64 MULTIPLICACION DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplos

(1) Multiplicar $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy$ por $\frac{2}{3}x-\frac{4}{5}y$.

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{3}xy & & \\
\frac{2}{3}x & -\frac{4}{5}y & & \\
\hline
\frac{1}{3}x^3 & -\frac{2}{9}x^2y & & \\
 & -\frac{2}{5}x^2y & +\frac{4}{15}xy^2 & \\
\hline
\frac{1}{3}x^3 & -\frac{28}{45}x^2y & +\frac{4}{15}xy^2. & R.
\end{array}$$

Los productos de los coeficientes deben simplificarse. Así, en este caso, tenemos: $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; $\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

(2) Multiplicar $\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{5}ab$ por $\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{2}ab-\frac{1}{4}b^2$.

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{3}a^2 & -\frac{1}{5}ab & +\frac{1}{2}b^2 & & & \\
\frac{3}{4}a^2 & -\frac{1}{2}ab & -\frac{1}{4}b^2 & & & \\
\hline
\frac{1}{4}a^4 & -\frac{3}{20}a^3b & +\frac{3}{8}a^2b^2 & & & \\
 & -\frac{1}{6}a^3b & +\frac{1}{10}a^2b^2 & -\frac{1}{4}ab^3 & & \\
 & & -\frac{1}{12}a^2b^2 & +\frac{1}{20}ab^3 & -\frac{1}{8}b^4 & \\
\hline
\frac{1}{4}a^4 & -\frac{19}{60}a^3b & +\frac{47}{120}a^2b^2 & -\frac{1}{5}ab^3 & -\frac{1}{8}b^4. & R.
\end{array}$$

EJERCICIO 44

Multiplicar:

1. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b$ por $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$.
2. $x-\frac{2}{5}y$ por $\frac{5}{6}y+\frac{1}{3}x$.
3. $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$ por $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$.
4. $\frac{1}{4}a^2-ab+\frac{2}{3}b^2$ por $\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}b$.
5. $\frac{2}{5}m^2+\frac{1}{3}mn-\frac{1}{2}n^2$ por $\frac{3}{2}m^2+2n^2-mn$.
6. $\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{2}{5}$ por $2x^3-\frac{1}{3}x+2$.
7. $\frac{1}{3}ax-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}a^2$ por $\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{2}{3}a^2$.
8. $\frac{2}{7}x^3+\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{5}x^2y$ por $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{5}{6}y^2$.
9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}x^3$ por $\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}x$.
10. $\frac{3}{4}m^3-\frac{1}{2}m^2n+\frac{2}{5}mn^2-\frac{1}{4}n^3$ por $\frac{2}{3}m^2+\frac{5}{2}n^2-\frac{2}{3}mn$.

65 MULTIPLICACION POR COEFICIENTES SEPARADOS

La multiplicación de polinomios por el **Método de coeficientes separados** abrevia la operación y se aplica en los dos casos siguientes:

1) Multiplicación de dos polinomios que contengan una sola letra y estén ordenados en el mismo orden con relación a esa letra.

Ejemplos

(1) Multiplicar $3x^3-2x^2+5x-2$ por $2x^2+4x-3$ por coeficientes separados.

Escribimos solamente los coeficientes con sus signos y efectuamos la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
3-2+5-2 \\
2+4-3 \\
\hline
6-4+10-4 \qquad\qquad \\
+12-8+20-8 \qquad \\
-9+6-15+6 \\
\hline
6+8-7+22-23+6
\end{array}$$

Como el primer término del multiplicando tiene x^3 y el primer término del multiplicador tiene x^2, el primer término del producto tendrá x^5 y como en los factores el exponente de x disminuye una unidad en cada término, en el producto el exponente de x disminuirá también una unidad en cada término, luego el producto será:

$$6x^5+8x^4-7x^3+22x^2-23x+6. \quad R.$$

(2) Multiplicar a^4-6a^2+2a-7 por a^3-2a+4 por coeficientes separados.

Escribimos solamente los coeficientes, pero como en el multiplicando falta el término en a^3 y en el multiplicador falta el término en a^2 escribimos cero en los lugares correspondientes a esos términos y tendremos:

$$\begin{array}{r}
1+0-6+2-7 \qquad\qquad \\
1+0-2+4 \qquad\qquad \\
\hline
1+0-6+2-7 \qquad\qquad\qquad \\
-2-0+12-4+14 \qquad \\
+4+0-24+8-28 \\
\hline
1+0-8+6+5-28+22-28
\end{array}$$

Como el primer término del multiplicando tiene a^4 y el primero del multiplicador tiene a^3, el primer término del producto tendrá a^7 y como en los factores el exponente de a disminuye de uno en uno, en el producto también disminuirá de uno en uno, luego el producto será:

$$a^7-8a^5+6a^4+5a^3-28a^2+22a-28. \quad R.$$

OBSERVACION

Si en ambos factores el exponente de la letra común disminuye de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc., no es necesario poner cero en los lugares correspondientes a los términos que falten; sólo hay que tener presente que en el producto, los exponentes también bajarán de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro, etc.

2) Multiplicación de dos polinomios homogéneos que contengan sólo dos letras comunes y estén ordenados en el mismo orden con relación a una de las letras.

Un polinomio es **homogéneo** cuando todos sus términos son homogéneos, o sea, cuando la suma de los exponentes de las letras en cada término es una cantidad constante.

El producto de dos polinomios homogéneos es otro polinomio homogéneo.

Ejemplo

Multiplicar $a^4-5a^3m+7a^2m^2-3m^4$ por $3a^2-2m^2$ por coeficientes separados.

El primer polinomio es homogéneo, porque la suma de los exponentes de las letras en todos los términos es 4 y el segundo también es homogéneo, porque la a tiene de exponente 2 y la m también tiene de exponente 2.

Escribimos solamente los coeficientes, poniendo cero en el multiplicando en el lugar correspondiente al término en am^3 que falta y poniendo cero en el multiplicador en el lugar correspondiente al término en am que falta, y tendremos:

$$\begin{array}{r}
1-5+7+0-3\\
3+0-2\\
\hline
3-15+21+0-9\\
-2+10-14-0+6\\
\hline
3-15+19+10-23-0+6
\end{array}$$

El primer término del producto tendrá a^6 y, como el producto es homogéneo, la suma de los exponentes de las letras en cada término será 6.

Como en los factores, el exponente de a disminuye una unidad en cada término y el de m aumenta una unidad en cada término, en el producto se cumplirá la misma ley, luego el producto será:

$$3a^6-15a^5m+19a^4m^2+10a^3m^3-23a^2m^4+6m^6. \quad R.$$

EJERCICIO 45

Multiplicar por coeficientes separados:

1. x^3-x^2+x por x^2-1.
2. $x^4+3x^3-5x^2+8$ por x^3-2x^2-7.
3. $a^4+3a^3b-2a^2b^2+5ab^3-b^4$ por $a^2-2ab+b^2$.
4. $m^3+n^3+6mn^2-5m^2n$ por $m^3-4mn^2-n^3$.
5. x^4-8x^2+3 por x^4+6x^2-5.
6. $a^6-3a^4-6a^2+10$ por $a^8-4a^6+3a^4-2a^2$.
7. $x^9-4x^6+3x^3-2$ por $3x^6-8x^3+10$.
8. $m^{12}-7m^8+9m^4-15$ por $m^{16}-5m^{12}+9m^8-4m^4+3$.
9. $x^5-3x^4y-6x^3y^2-4x^2y^3-y^5$ por $2x^2+4y^2$.
10. $6a^5-4a^2+6a-2$ por a^4-2a^2+a-7.
11. $n^6-3n^4+5n^3-8n+4$ por n^4-3n^2+4.
12. $3x^4-4x^3y-y^4$ por $x^3-5xy^2+3y^3$.
13. $x^{10}-5x^6y^4+3x^2y^8-6y^{10}$ por $x^6-4x^4y^2+y^6-5x^2y^4$.
14. $a^m-3a^{m-1}+5a^{m-3}$ por a^2-5.
15. $a^{x+2}-5a^{x+1}-7a^{x-1}$ por $a^x+6a^{x+1}+7a^{x+3}$.
16. $x^{a+2}-5x^a-6x^{a-2}$ por $6x^{a+1}-4x^a+2x^{a-1}+x^{a-2}$.
17. $a^{2x+2}-a^{2x}-3a^{2x+1}-5a^{2x-1}$ por $3a^{3x-1}-5a^{3x}+6a^{3x+1}$.

66 PRODUCTO CONTINUADO DE POLINOMIOS

Ejemplo

Efectuar $3x(x+3)(x-2)(x+1)$.

Al poner los factores entre paréntesis la multiplicación está indicada.

La operación se desarrolla efectuando el producto de dos factores cualesquiera; este producto se multiplica por el tercer factor y este nuevo producto por el factor que queda.

Así, en este caso efectuamos el producto $3x(x+3)=3x^2+9x$. Este producto lo multiplicamos por $x-2$ y tendremos:

$$\begin{array}{r}
3x^2+9x\\
x-2\\
\hline
3x^3+9x^2\\
-6x^2-18x\\
\hline
3x^3+3x^2-18x
\end{array}$$

Este producto se multiplica por $x+1$:

$$\begin{array}{r}
3x^3+3x^2-18x\\
x+1\\
\hline
3x^4+3x^3-18x^2\\
3x^3+3x^2-18x\\
\hline
3x^4+6x^3-15x^2-18x. \quad R.
\end{array}$$

En virtud de la Ley Asociativa de la multiplicación, podíamos también haber hallado el producto $3x(x+3)$; después el producto $(x-2)(x+1)$ y luego multiplicar ambos productos parciales.

EJERCICIO 46

Simplificar:

1. $4(a+5)(a-3)$.
2. $3a^2(x+1)(x-1)$.
3. $2(a-3)(a-1)(a+4)$.
4. $(x^2+1)(x^2-1)(x^2+1)$.
5. $m(m-4)(m-6)(3m+2)$.
6. $(a-b)(a^2-2ab+b^2)(a+b)$.
7. $3x(x^2-2x+1)(x-1)(x+1)$.
8. $(x^2-x+1)(x^2+x-1)(x-2)$.
9. $(a^m-3)(a^{m-1}+2)(a^{m-1}-1)$.
10. $a(a-1)(a-2)(a-3)$
11. $(x-3)(x+4)(x-5)(x+1)$.
12. $(x^2-3)(x^2+2x+1)(x-1)(x^2+3)$.
13. $9a^2(3a-2)(2a+1)(a-1)(2a-1)$.
14. $a^x(a^{x+1}+b^{x+2})(a^{x+1}-b^{x+2})b^x$.

67 MULTIPLICACION COMBINADA CON SUMA Y RESTA

1) Simplificar $(x+3)(x-4)+3(x-1)(x+2)$.

Efectuaremos el primer producto $(x+3)(x-4)$; efectuaremos el segundo producto $3(x-1)(x+2)$ y sumaremos este segundo producto con el primero.

Efectuando el primer producto: $(x+3)(x-4)=x^2-x-12$.

Efectuando el segundo producto: $3(x-1)(x+2)=3(x^2+x-2)=3x^2+3x-6$.

Sumando este segundo producto con el primero:

$$(x^2-x-12)+(3x^2+3x-6)=x^2-x-12+3x^2+3x-6=4x^2+2x-18. \quad R.$$

2) Simplificar $x(a-b)^2-4x(a+b)^2$.

Elevar una cantidad al cuadrado equivale a multiplicarla por sí misma; así $(a-b)^2$ equivale a $(a-b)(a-b)$.

Desarrollando $x(a-b)^2$.

$$x(a-b)^2=x(a^2-2ab+b^2)=a^2x-2abx+b^2x.$$

Desarrollando $4x(a+b)^2$.

$$4x(a+b)^2=4x(a^2+2ab+b^2)=4a^2x+8abx+4b^2x.$$

Restando este segundo producto del primero:

$$\begin{aligned}&a^2x-2abx+b^2x-(4a^2x+8abx+4b^2x)\\&=a^2x-2abx+b^2x-4a^2x-8abx-4b^2x\\&=-3a^2x-10abx-3b^2x.\quad \text{R.}\end{aligned}$$

EJERCICIO 47

Simplificar:

$4(x+3)+5(x+2)$.
$6(x^2+4)-3(x^2+1)+5(x^2+2)$.
$a(a-x)+3a(x+2a)-a(x-3a)$.
$x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)-3x^2y^2$.
$4m^3-5mn^2+3m^2(m^2+n^2)-3m(m^2-n^2)$.
$y^2+x^2y^3-y^3(x^2+1)+y^2(x^2+1)-y^2(x^2-1)$.
$5(x+2)-(x+1)(x+4)-6x$.
$(a+5)(a-5)-3(a+2)(a-2)+5(a+4)$.
$(a+b)(4a-3b)-(5a-2b)(3a+b)-(a+b)(3a-6b)$.
$(a+c)^2-(a-c)^2$.

11. $3(x+y)^2-4(x-y)^2+3x^2-3y^2$.
12. $(m+n)^2-(2m+n)^2+(m-4n)^2$.
13. $x(a+x)+3x(a+1)-(x+1)(a+2x)-(a-x)^2$
14. $(a+b-c)^2+(a-b+c)^2-(a+b+c)^2$.
15. $(x^2+x-3)^2-(x^2-2+x)^2+(x^2-x-3)^2$.
16. $(x+y+z)^2-(x+y)(x-y)+3(x^2+xy+y^2)$.
17. $[x+(2x-3)][3x-(x+1)]+4x-x^2$.
18. $[3(x+2)-4(x+1)][3(x+4)-2(x+2)]$.
19. $[(m+n)(m-n)-(m+n)(m+n)][2(m+n)-3(m-n)]$.
20. $[(x+y)^2-3(x-y)^2][(x+y)(x-y)+x(y-x)]$.

68 SUPRESION DE SIGNOS DE AGRUPACION CON PRODUCTOS INDICADOS

Ejemplos

(1) Simplificar $5a+\{a-2[a+3b-4(a+b)]\}$.

Un coeficiente colocado junto a un signo de agrupación nos indica que hay que multiplicarlo por cada uno de los términos encerrados en el signo de agrupación. Así, en este caso multiplicamos -4 por $a+b$, y tendremos:

$$5a+\{a-2[a+3b-4a-4b]\}.$$

En el curso de la operación podemos reducir términos semejantes. Así, reduciendo los términos semejantes dentro del corchete, tenemos:

$$5a+\{a-2[-3a-b]\}.$$

Efectuando la multiplicación de -2 por $(-3a-b)$ tenemos:

$$\begin{aligned}&5a+\{a+6a+2b\}\\&=5a+\{7a+2b\}\\&=5a+7a+2b=12a+2b.\quad \text{R.}\end{aligned}$$

(2) Simplificar $-3(x+y)-4[-x+2\{-x+2y-3(x-\overline{y+2})\}-2x]$.

Suprimiendo primero el vínculo, tendremos:

$$\begin{aligned}&-3(x+y)-4[-x+2\{-x+2y-3(x-y-2)\}-2x]\\&=-3x-3y-4[-x+2\{-x+2y-3x+3y+6\}-2x]\\&=-3x-3y-4[-x+2\{-4x+5y+6\}-2x]\\&=-3x-3y-4[-x-8x+10y+12-2x]\\&=-3x-3y-4[-11x+10y+12]\\&=-3x-3y+44x-40y-48\\&=41x-43y-48.\quad \text{R.}\end{aligned}$$

EJERCICIO 48

Simplificar:

1. $x-[3a+2(-x+1)]$.
2. $-(a+b)-3[2a+b(-a+2)]$.
3. $-[3x-2y+(x-2y)-2(x+y)-3(2x+1)]$.
4. $4x^2-\{-3x+5-[-x+x(2-x)]\}$.
5. $2a-\{-3x+2[-a+3x-2(-a+b-\overline{2+a})]\}$.
6. $a-(x+y)-3(x-y)+2[-(x-2y)-2(-x-y)]$.
7. $m-(m+n)-3\{-2m+[-2m+n+2(-1+n)-\overline{m+n-1}]\}$.
8. $-2(a-b)-3(a+2b)-4\{a-2b+2[-a+b-1+2(a-b)]\}$.
9. $-5(x+y)-[2x-y+2\{-x+y-3-\overline{x-y-1}\}]+2x$.
10. $m-3(m+n)+[-\{-(-2m+n-2-3[m-n+1])+m\}]$.
11. $-3(x-2y)+2\{-4[-2x-3(x+y)]\}-\{-[-(x+y)]\}$.
12. $5\{-(a+b)-3[-2a+3b-(a+b)+(-a-b)+2(-a+b)]-a\}$.
13. $-3\{-[+(-a+b)]\}-4\{-[-(-a-b)]\}$.
14. $-\{a+b-2(a-b)+3\{-[2a+b-3(a+b-1)]\}-3[-a+2(-1+a)]\}$.

69 CAMBIOS DE SIGNOS EN LA MULTIPLICACION

Las reglas generales para los cambios de signos en la multiplicación son las siguientes: $(+a)(+b)=+ab$ y $(-a)(-b)=+ab$.

1) Si se cambia el signo a un número par de factores, el signo del producto no varía.

En efecto: Sabemos que

$$(+a)(+b)=+ab \quad \text{y} \quad (-a)(-b)=+ab,$$

donde vemos que cambiando el signo a dos factores el signo del producto no varía.

2) **Si se cambia el signo a un número impar de factores, el signo del producto varía.**

En efecto: Sabemos que

$$(+a)(+b)=+ab \quad \text{y} \quad (+a)(-b)=-ab \quad \text{o} \quad (-a)(+b)=-ab,$$

donde vemos que cambiando el signo a un factor el signo del producto varía.

Cuando los **factores sean polinomios**, para cambiarles el signo hay que cambiar el signo a **cada uno de sus términos**. Así, en el producto $(a-b)(c-d)$, para cambiar el signo al factor $(a-b)$, hay que escribir $(b-a)$, donde vemos que a, que tenía $+$, ahora tiene $-$, y b, que tenía $-$, tiene ahora $+$; para cambiar el signo a $(c-d)$ hay que escribir $(d-c)$.

Por tanto, como cambiando el signo a un factor el producto varía su signo, tendremos:

$$(a-b)(c-d)=-(b-a)(c-d)$$
$$(a-b)(c-d)=-(a-b)(d-c)$$

y como cambiando el signo a **dos factores** el producto no varía de signo, tendremos:

$$(a-b)(c-d)=(b-a)(d-c).$$

Tratándose de **más de dos factores** aplicamos las reglas generales que nos dicen que cambiando el signo a un número par de factores el producto no varía de signo y cambiando el signo a un número impar de factores el producto varía de signo.

Así, tendremos:

$$(+a)(+b)(+c)=-(-a)(+b)(+c)$$
$$(+a)(+b)(+c)=-(+a)(-b)(+c)$$
$$(+a)(+b)(+c)=-(-a)(-b)(-c)$$

y también:

$$(+a)(+b)(+c)=(-a)(-b)(+c)$$
$$(+a)(+b)(+c)=(+a)(-b)(-c)$$
$$(+a)(+b)(+c)=(-a)(+b)(-c).$$

Si se trata de polinomios, tendremos:

$$(a-b)(c-d)(m-n)=-(b-a)(c-d)(m-n)$$
$$(a-b)(c-d)(m-n)=-(a-b)(d-c)(m-n)$$
$$(a-b)(c-d)(m-n)=-(b-a)(d-c)(n-m)$$

y también:

$$(a-b)(c-d)(m-n)=(b-a)(d-c)(m-n)$$
$$(a-b)(c-d)(m-n)=(a-b)(d-c)(n-m)$$
$$(a-b)(c-d)(m-n)=(b-a)(c-d)(n-m).$$

PLATON (429-347 A. C.) Uno de los más grandes filósofos de la Antigüedad. Alumno predilecto de Sócrates, dio a conocer las doctrinas del Maestro y las suyas propias en los famosos Diálogos, entre los que sobresalen el Timeo, Fedón, el Banquete etc. Viajó por el mundo griego de su época, y recibe la influencia de los sabios y matemáticos contemporáneos de él. Alcanzó pleno dominio de las ciencias de su tiempo. Al fundar la Academia hizo inscribir en el frontispicio: "Que nadie entre aquí si no sabe Geometría".

CAPITULO V

DIVISION

(70) LA DIVISION es una operación que tiene por objeto, dado el producto de dos factores (dividendo) y uno de los factores (divisor), hallar el otro factor (cociente).

De esta definición se deduce que el cociente multiplicado por el divisor reproduce el dividendo.

Así, la operación de dividir $6a^2$ entre $3a$, que se indica $6a^2 \div 3a$ ó $\frac{6a^2}{3a}$, consiste en hallar una cantidad que multiplicada por $3a$ dé $6a^2$. Esa cantidad (**cociente**) es $2a$.

Es evidente que $6a^2 \div 2a = \frac{6a^2}{2a} = 3a$, donde vemos que *si* el dividendo se divide entre el cociente nos da de cociente lo que antes era divisor.

(71) LEY DE LOS SIGNOS

La ley de los signos en la división es la misma que en la multiplicación:

Signos iguales dan + y signos diferentes dan −

En efecto:

1.
$$+ab \div +a = \frac{+ab}{+a} = +b$$

porque el cociente multiplicado por el divisor tiene que dar el dividendo con su signo y siendo el dividendo positivo, como el divisor es positivo, el cociente tiene que ser positivo para que multiplicado por el divisor reproduzca el dividendo: $(+a) \times (+b) = +ab$.

El cociente no puede ser $-b$ porque multiplicado por el divisor no reproduce el dividendo: $(+a) \times (-b) = -ab$.

2. $-ab \div -a = \dfrac{-ab}{-a} = +b$ porque $(-a) \times (+b) = -ab$.

3. $+ab \div -a = \dfrac{+ab}{-a} = -b$ porque $(-a) \times (-b) = +ab$.

4. $-ab \div +a = \dfrac{-ab}{+a} = -b$ porque $(+a) \times (-b) = -ab$.

En resumen:

+ entre + da +.
− entre − da +.
+ entre − da −.
− entre + da −.

72 LEY DE LOS EXPONENTES

Para dividir potencias de la misma base se deja la misma base y se le pone de exponente la diferencia entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

Sea el cociente $a^5 \div a^3$. Decimos que

$$a^5 \div a^3 = \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2$$

a^2 será el cociente de esta división si multiplicada por el divisor a^3 reproduce el dividendo, y en efecto: $a^2 \times a^3 = a^5$.

73 LEY DE LOS COEFICIENTES

El coeficiente del cociente es el cociente de dividir el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor.

En efecto:

$$20a^2 \div 5a = 4a$$

$4a$ es el cociente porque $4a \times 5a = 20a^2$ y vemos que el coeficiente del cociente 4, es el cociente de dividir 20 entre 5.

74 CASOS DE LA DIVISION

Estudiaremos tres casos: 1) División de monomios. 2) División de un polinomio por un monomio. 3) División de dos polinomios.

I. DIVISION DE MONOMIOS

De acuerdo con las leyes anteriores, podemos enunciar la siguiente:

75 REGLA PARA DIVIDIR DOS MONOMIOS

Se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra un exponente igual a la diferencia entre el exponente que tiene en el dividendo y el exponente que tiene en el divisor. El signo lo da la Ley de los signos.

Ejemplos

(1) Dividir $4a^3b^2$ entre $-2ab$.

$$4a^3b^2 \div -2ab = \frac{4a^3b^2}{-2ab} = -2a^2b. \quad \text{R.}$$

porque $(-2ab) \times (-2a^2b) = 4a^3b^2$.

(2) Dividir $-5a^4b^3c$ entre $-a^2b$.

$$-5a^4b^3c \div -a^2b = \frac{-5a^4b^3c}{-a^2b} = 5a^2b^2c. \quad \text{R.}$$

porque $5a^2b^2c \times (-a^2b) = -5a^4b^3c$.

Obsérvese que cuando en el dividendo hay una letra que no existe en el divisor, en este caso c, dicha letra aparece en el cociente. Sucede lo mismo que si la c estuviera en el divisor con exponente cero porque tendríamos:

$$c \div c^0 = c^{1-0} = c.$$

(3) Dividir $-20mx^2y^3 \div 4xy^3$.

$$-20mx^2y^3 \div 4xy^3 = \frac{-20mx^2y^3}{4xy^3} = -5mx. \quad \text{R.}$$

porque $4xy^3 \times (-5mx) = -20mx^2y^3$.

Obsérvese que letras iguales en el dividendo y divisor se cancelan porque su cociente es 1. Así, en este caso, y^3 del dividendo se cancela con y^3 del divisor, igual que en Aritmética suprimimos los factores comunes en el numerador y denominador de un quebrado.

También, de acuerdo con la Ley de los exponentes $y^3 \div y^3 = y^{3-3} = y^0$ y veremos más adelante que $y^0 = 1$ y 1 como factor puede suprimirse en el cociente.

(4) Dividir $-x^my^nz^a$ entre $3xy^2z^3$.

$$-x^my^nz^a \div 3xy^2z^3 = \frac{-x^my^nz^a}{3xy^2z^3} = -\tfrac{1}{3}x^{m-1}y^{n-2}z^{a-3}. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 49

Dividir:

1. -24 entre 8.
2. -63 entre -7.
3. $-5a^2$ entre $-a$.
4. $14a^3b^4$ entre $-2ab^2$.
5. $-a^3b^4c$ entre a^3b^4.
6. $-a^2b$ entre $-ab$.
7. $54x^2y^2z^3$ entre $-6xy^2z^3$.
8. $-5m^2n$ entre m^2n.
9. $-8a^2x^3$ entre $-8a^2x^3$.
10. $-xy^2$ entre $2y$.
11. $5x^4y^5$ entre $-6x^4y$.
12. $-a^8b^9c^4$ entre $8c^4$.
13. $16m^6n^4$ entre $-5n^3$.
14. $-108a^7b^6c^8$ entre $-20b^6c^8$.
15. $-2m^2n^6$ entre $-3mn^6$.
16. a^x entre a^2.
17. $-3a^xb^m$ entre ab^2.
18. $5a^mb^nc$ entre $-6a^3b^4c$.
19. a^xb^m entre $-4a^mb^n$.
20. $-3m^an^bx^3$ entre $-5m^1n^2x^3$.

(5) Dividir $a^{x+3}b^{m+2}$ entre $a^{x+2}b^{m+1}$.

$$\frac{a^{x+3}b^{m+2}}{a^{x+2}b^{m+1}}=a^{x+3-(x+2)}b^{m+2-(m+1)}=a^{x+3-x-2}b^{m+2-m-1}=ab.\quad \text{R.}$$

(6) Dividir $-3x^{2n+3}y^{3n-2}$ entre $-5x^{n-4}y^{n-1}$.

$$\frac{-3x^{2n+3}y^{3n-2}}{-5x^{n-4}y^{n-1}}=\frac{3}{5}x^{2n+3-(n-4)}y^{3n-2-(n-1)}=\frac{3}{5}x^{2n+3-n+4}y^{3n-2-n+1}=\frac{3}{5}x^{n+7}y^{2n-1}.\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 50

Dividir:

1. a^{m+3} entre a^{m+2}.
2. $2x^{a+4}$ entre $-x^{a+2}$.
3. $-3a^{m-2}$ entre $-5a^{m-5}$.
4. x^{2n+3} entre $-4x^{n+4}$.
5. $-4a^{x-2}b^n$ entre $-5a^3b^2$.
6. $-7x^{m+3}y^{m-1}$ entre $-8x^4y^2$.
7. $5a^{2m-1}b^{x-3}$ entre $-6a^{2m-2}b^{x-4}$.
8. $-4x^{n-1}y^{n+1}$ entre $5x^{n-1}y^{n+1}$.
9. $a^{m+n}b^{x+a}$ entre a^mb^a.
10. $-5ab^2c^3$ entre $6a^mb^nc^x$.

(7) Dividir $\frac{2}{3}a^2b^3c$ entre $-\frac{5}{6}a^2bc$.

$$\frac{\frac{2}{3}a^2b^3c}{-\frac{5}{6}a^2bc}=-\frac{4}{5}b^2.\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 51

Dividir:

1. $\frac{1}{2}x^2$ entre $\frac{2}{3}$.
2. $-\frac{3}{5}a^3b$ entre $-\frac{4}{5}a^2b$.
3. $\frac{2}{3}xy^5z^3$ entre $-\frac{1}{6}z^3$.
4. $-\frac{7}{8}a^mb^n$ entre $-\frac{3}{4}ab^2$.
5. $-\frac{2}{9}x^4y^5$ entre -2.
6. $3m^4n^5p^6$ entre $-\frac{1}{3}m^4np^5$.
7. $-\frac{7}{8}a^2b^5c^6$ entre $-\frac{5}{2}ab^5c^6$.
8. $\frac{2}{3}a^xb^m$ entre $-\frac{3}{5}ab^2$.
9. $-\frac{3}{8}c^3d^5$ entre $\frac{3}{4}d^x$.
10. $\frac{3}{4}a^mb^n$ entre $-\frac{1}{2}b^3$.
11. $-2a^{x+4}b^{m-3}$ entre $-\frac{1}{2}a^4b^3$.
12. $-\frac{1}{15}a^{x-3}b^{m+5}c^2$ entre $\frac{3}{5}a^{x-4}b^{m-1}$.

II. DIVISION DE POLINOMIOS POR MONOMIOS

76 Sea $(a+b-c)\div m$. Tendremos:

$$(a+b-c)\div m=\frac{a+b-c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$$

En efecto: $\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}$ es el cociente de la división porque multiplicado por el divisor reproduce el dividendo:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}\right)m=\frac{a}{m}\times m+\frac{b}{m}\times m-\frac{c}{m}\times m=a+b-c.$$

Podemos, pues, enunciar la siguiente:

77 **REGLA PARA DIVIDIR UN POLINOMIO POR UN MONOMIO**

Se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio separando los cocientes parciales con sus propios signos.

Esta es la Ley Distributiva de la división.

Ejemplos

(1) Dividir $3a^3-6a^2b+9ab^2$ entre $3a$.

$$(3a^3-6a^2b+9ab^2)\div 3a=\frac{3a^3-6a^2b+9ab^2}{3a}=\frac{3a^3}{3a}-\frac{6a^2b}{3a}+\frac{9ab^2}{3a}$$
$$=a^2-2ab+3b^2.\quad \text{R.}$$

(2) Dividir $2a^xb^m-6a^{x+1}b^{m-1}-3a^{x+2}b^{m-2}$ entre $-2a^3b^4$.

$$(2a^xb^m-6a^{x+1}b^{m-1}-3a^{x+2}b^{m-2})\div -2a^3b^4=-\frac{2a^xb^m}{2a^3b^4}$$
$$+\frac{6a^{x+1}b^{m-1}}{2a^3b^4}+\frac{3a^{x+2}b^{m-2}}{2a^3b^4}=-a^{x-3}b^{m-4}+3a^{x-2}b^{m-5}+\frac{3}{2}a^{x-1}b^{m-6}.\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 52

Dividir:

1. a^2-ab entre a.
2. $3x^2y^3-5a^2x^4$ entre $-3x^2$.
3. $3a^3-5ab^2-6a^2b^3$ entre $-2a$.
4. x^3-4x^2+x entre x.
5. $4x^8-10x^6-5x^4$ entre $2x^3$.
6. $6m^3-8m^2n+20mn^2$ entre $-2m$.
7. $6a^8b^8-3a^6b^6-a^2b^3$ entre $3a^2b^3$.
8. $x^4-5x^3-10x^2+15x$ entre $-5x$.
9. $8m^9n^2-10m^7n^4-20m^5n^6+12m^3n^8$ entre $2m^2$.
10. a^x+a^{m-1} entre a^2.
11. $2a^m-3a^{m+2}+6a^{m+4}$ entre $-3a^3$.
12. $a^mb^n+a^{m-1}b^{n+2}-a^{m-2}b^{n+4}$ entre a^2b^3.
13. $x^{n+2}-5x^n+6x^{n+1}-x^{n-1}$ entre x^{n-2}.
14. $4a^{x+4}b^{m-1}-6a^{x+3}b^{m-2}+8a^{x+2}b^{m-3}$ entre $-2a^{x+2}b^{m-4}$.

(3) Dividir $\frac{3}{4}x^3y - \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{2}y^4$ entre $\frac{5}{6}y$.

$$\left(\frac{3}{4}x^3y - \frac{2}{3}x^2y^2 + \frac{5}{6}xy^3 - \frac{1}{2}y^4\right) \div \frac{5}{6}y = \frac{\frac{3}{4}x^3y}{\frac{5}{6}y} - \frac{\frac{2}{3}x^2y^2}{\frac{5}{6}y} + \frac{\frac{5}{6}xy^3}{\frac{5}{6}y} - \frac{\frac{1}{2}y^4}{\frac{5}{6}y}$$

$$= \frac{9}{10}x^3 - \frac{4}{5}x^2y + xy^2 - \frac{3}{5}y^3. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 53

Dividir:

1. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ entre $\frac{2}{3}x$.
2. $\frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{4}a$ entre $-\frac{3}{5}$.
3. $\frac{1}{4}m^4 - \frac{2}{3}m^3n + \frac{3}{8}m^2n^2$ entre $\frac{1}{4}m^2$.
4. $\frac{2}{3}x^4y^3 - \frac{1}{5}x^3y^4 + \frac{1}{4}x^2y^5 - xy^6$ entre $-\frac{1}{5}xy^3$.
5. $\frac{2}{5}a^5 - \frac{1}{3}a^3b^3 - ab^5$ entre $5a$.
6. $\frac{1}{3}a^m + \frac{1}{4}a^{m-1}$ entre $\frac{1}{2}a$.
7. $\frac{2}{3}a^{x+1} - \frac{1}{4}a^{x-1} - \frac{2}{5}a^x$ entre $\frac{1}{6}a^{x-2}$.
8. $-\frac{3}{4}a^{n-1}x^{m+2} + \frac{1}{8}a^nx^{m+1} - \frac{2}{3}a^{n+1}x^m$ entre $-\frac{2}{5}a^3x^2$.

III. DIVISION DE DOS POLINOMIOS

La división de dos polinomios se verifica de acuerdo con la siguiente:

78 REGLA PARA DIVIDIR DOS POLINOMIOS

Se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma letra.

Se divide el primer término del dividendo entre el primero del divisor y tendremos el primer término del cociente.

Este primer término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, para lo cual se le cambia el signo, escribiendo cada término debajo de su semejante. Si algún término de este producto no tiene término semejante en el dividendo se escribe en el lugar que le corresponda de acuerdo con la ordenación del dividendo y el divisor.

Se divide el primer término del resto entre el primer término del divisor y tendremos el segundo término del cociente.

Este segundo término del cociente se multiplica por todo el divisor y el producto se resta del dividendo, cambiando los signos.

Se divide el primer término del segundo resto entre el primero del divisor y se efectúan las operaciones anteriores; y así sucesivamente hasta que el residuo sea cero.

Ejemplos

(1) Dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$.

$$\begin{array}{rr|l} 3x^2 + 2x - 8 & & x + 2 \\ \cline{3-3} -3x^2 - 6x & & 3x - 4. \quad \text{R.} \\ \hline -4x - 8 & & \\ 4x + 8 & & \\ \hline \end{array}$$

EXPLICACION

El dividendo y el divisor están ordenados en orden descendente con relación a x.

Dividimos el primer término del dividendo $3x^2$ entre el primero del divisor x y tenemos $3x^2 \div x = 3x$. Este es el primer término del cociente.

Multiplicamos $3x$ por cada uno de los términos del divisor y como estos productos hay que restarlos del dividendo, tendremos: $3x \times x = 3x^2$, para restar $-3x^2$; $3x \times 2 = 6x$, para restar $-6x$.

Estos productos con sus signos cambiados los escribimos debajo de los términos semejantes con ellos del dividendo y hacemos la reducción; nos da $-4x$ y bajamos el -8.

Dividimos $-4x$ entre x: $-4x \div x = -4$ y este es el segundo término del cociente. Este -4 hay que multiplicarlo por cada uno de los términos del divisor y restar los productos del dividendo y tendremos:

$$(-4) \times x = -4x, \text{ para restar } +4x; \; (-4) \times 2 = -8, \text{ para restar } 8.$$

Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y haciendo la reducción nos da cero de residuo.

RAZON DE LA REGLA APLICADA

Dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$ es hallar una cantidad que multiplicada por $x + 2$ nos dé $3x^2 + 2x - 8$, de acuerdo con la definición de división.

El término $3x^2$ que contiene la mayor potencia de x en el dividendo tiene que ser el producto del término que tiene la mayor potencia de x en el divisor que es x por el término que tenga la mayor potencia de x en el cociente, luego dividiendo $3x^2 \div x = 3x$ tendremos el término que contiene la mayor potencia de x en el cociente.

Hemos multiplicado $3x$ por $x + 2$ que nos da $3x^2 + 6x$ y este producto lo restamos del dividendo. El residuo es $-4x - 8$.

Este residuo $-4x - 8$, se considera como un nuevo dividendo, porque tiene que ser el producto del divisor $x + 2$ por lo que aún nos falta del cociente. Divido $-4x$ entre x y me da de cociente -4.

Este es el segundo término del cociente. Multiplicando -4 por $x + 2$ obtengo $-4x - 8$. Restando este producto del dividendo $-4x - 8$ me da cero de residuo. Luego $3x - 4$ es la cantidad que multiplicada por el divisor $x + 2$ nos da el dividendo $3x^2 + 2x - 8$, luego $3x - 4$ es el cociente de la división.

(2) Dividir $28x^2-30y^2-11xy$ entre $4x-5y$.

Ordenando dividendo y divisor en orden descendente con relación a x tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
28x^2-11xy-30y^2 & 4x-5y \\ \cline{2-2}
-28x^2+35xy & 7x+6y. \quad R. \\
\quad\quad\ \ 24xy-30y^2 & \\
\quad\ \ -24xy+30y^2 &
\end{array}$$

EXPLICACION

Dividimos $28x^2 \div 4x = 7x$. Este primer término del cociente lo multiplicamos por cada uno de los términos del divisor: $7x \times 4x = 28x^2$, para restar $-28x^2$; $7x \times (-5y) = -35xy$, para restar $+35xy$. Escribimos estos términos debajo de sus semejantes en el dividendo y los reducimos. El residuo es $24xy-30y^2$. Divido el primer término del residuo entre el primero del divisor: $24xy \div 4x = +6y$. Este es el segundo término del cociente.

Multiplico $6y$ por cada uno de los términos del divisor. $6y \times 4x = 24xy$ para restar $-24xy$; $6y \times (-5y) = -30y^2$, para restar $+30y^2$. Escribimos estos términos debajo de sus semejantes y haciendo la reducción nos da cero de residuo. $7x+6y$ es el cociente de la división.

EJERCICIO 54

Dividir:

1. a^2+2a-3 entre $a+3$.
2. a^2-2a-3 entre $a+1$.
3. x^2-20+x entre $x+5$.
4. $m^2-11m+30$ entre $m-6$.
5. $x^2+15-8x$ entre $3-x$.
6. $6+a^2+5a$ entre $a+2$.
7. $6x^2-xy-2y^2$ entre $y+2x$.
8. $-15x^2-8y^2+22xy$ entre $2y-3x$.
9. $5a^2+8ab-21b^2$ entre $a+3b$.
10. $14x^2-12+22x$ entre $7x-3$.
11. $-8a^2+12ab-4b^2$ entre $b-a$.
12. $5n^2-11mn+6m^2$ entre $m-n$.
13. $32n^2-54m^2+12mn$ entre $8n-9m$.
14. $-14y^2+33+71y$ entre $-3-7y$.
15. x^3-y^3 entre $x-y$.
16. $a^3+3ab^2-3a^2b-b^3$ entre $a-b$.
17. x^4-9x^2+3+x entre $x+3$.
18. a^4+a entre $a+1$.
19. m^6-n^6 entre m^2-n^2.
20. $2x^4-x^3-3+7x$ entre $2x+3$.
21. $3y^5+5y^2-12y+10$ entre y^2+2.
22. $am^4-am-2a$ entre $am+a$.
23. $12a^3+33ab^2-35a^2b-10b^3$ entre $4a-5b$.
24. $15m^5-9m^3n^2-5m^4n+3m^2n^3+3mn^4-n^5$ entre $3m-n$.

79 PRUEBA DE LA DIVISION

Puede verificarse, cuando la división es exacta, multiplicando el divisor por el cociente, debiendo darnos el dividendo si la operación está correcta.

(3) Dividir $2x^3-2-4x$ entre $2+2x$.

Al ordenar el dividendo y el divisor debemos tener presente que en el dividendo falta el término en x^2, luego debemos dejar un lugar para ese término:

$$\begin{array}{l|l}
2x^3 \quad\quad\quad -4x-2 & 2x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^3-2x^2 & x^2-x-1. \quad R. \\
\quad\quad -2x^2-4x & \\
\quad\quad\ \ 2x^2+2x & \\
\quad\quad\quad\quad -2x-2 & \\
\quad\quad\quad\quad\ \ 2x+2 &
\end{array}$$

(4) Dividir $3a^5+10a^3b^2+64a^2b^3-21a^4b+32ab^4$ entre $a^3-4ab^2-5a^2b$.

Ordenando con relación a la a en orden descendente:

$$\begin{array}{l|l}
3a^5-21a^4b+10a^3b^2+64a^2b^3+32ab^4 & a^3-5a^2b-4ab^2 \\ \cline{2-2}
-3a^5+15a^4b+12a^3b^2 & 3a^2-6ab-8b^2. \quad R. \\
\quad -6a^4b+22a^3b^2+64a^2b^3 & \\
\quad\ \ 6a^4b-30a^3b^2-24a^2b^3 & \\
\quad\quad -8a^3b^2+40a^2b^3+32ab^4 & \\
\quad\quad\ \ 8a^3b^2-40a^2b^3-32ab^4 &
\end{array}$$

(5) Dividir $x^{12}+x^6y^6-x^8y^4-x^2y^{10}$ entre $x^8+x^6y^2-x^4y^4-x^2y^6$.

Al ordenar el dividendo tenemos $x^{12}-x^8y^4+x^6y^6-x^2y^{10}$.

Aquí podemos observar que faltan los términos en $x^{10}y^2$ y en x^4y^8; dejaremos pues un espacio entre x^{12} y $-x^8y^4$ para el término en $x^{10}y^2$ y otro espacio entre x^6y^6 y $-x^2y^{10}$ para término en x^4y^8 y tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
x^{12} \quad\quad\quad -x^8y^4+x^6y^6 \quad\quad\quad -x^2y^{10} & x^8+x^6y^2-x^4y^4-x^2y^6 \\ \cline{2-2}
-x^{12}-x^{10}y^2+x^8y^4+x^6y^6 & x^4-x^2y^2+y^4. \quad R. \\
\quad -x^{10}y^2 \quad\quad\quad +2x^6y^6 & \\
\quad\ \ x^{10}y^2+x^8y^4-x^6y^6-x^4y^8 & \\
\quad\quad\quad x^8y^4+x^6y^6-x^4y^8-x^2y^{10} & \\
\quad\quad\ \ -x^8y^4-x^6y^6+x^4y^8+x^2y^{10} &
\end{array}$$

(6) Dividir $11a^3-3a^5-46a^2+32$ entre $8-3a^2-6a$.

Ordenaremos en orden ascendente porque con ello logramos que el primer término del divisor sea positivo, lo cual siempre es más cómodo. Además, como en el dividendo faltan los términos en a^4 y en a dejaremos los lugares vacíos correspondientes y tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
32 \quad\quad\quad -46a^2+11a^3 \quad\quad\quad -3a^5 & 8-6a-3a^2 \\ \cline{2-2}
-32+24a+12a^2 & 4+3a-2a^2+a^3. \quad R. \\
\quad\quad 24a-34a^2+11a^3 & \\
\quad -24a+18a^2+9a^3 & \\
\quad\quad\quad -16a^2+20a^3 & \\
\quad\quad\quad\ \ 16a^2-12a^3-6a^4 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 8a^3-6a^4-3a^5 & \\
\quad\quad\quad\quad -8a^3+6a^4+3a^5 &
\end{array}$$

EJERCICIO 55

Dividir:

1. a^4-a^2-2a-1 entre a^2+a+1.
2. x^5+12x^2-5x entre x^2-2x+5.
3. $m^5-5m^4n+20m^2n^3-16mn^4$ entre $m^2-2mn-8n^2$.
4. x^4-x^2-2x-1 entre x^2-x-1.
5. $x^6+6x^3-2x^5-7x^2-4x+6$ entre x^4-3x^2+2.

6. $m^6+m^5-4m^4-4m+m^2-1$ entre m^3+m^2-4m-1.
7. $a^5-a^4+10-27a+7a^2$ entre a^2+5-a.
8. $3x^3y-5xy^3+3y^4-x^4$ entre $x^2-2xy+y^2$.
9. $2n-2n^3+n^4-1$ entre n^2-2n+1.
10. $22a^2b^4-5a^4b^2+a^5b-40ab^5$ entre $a^2b-2ab^2-10b^3$.
11. $16x^4-27y^4-24x^2y^2$ entre $8x^3-9y^3+6xy^2-12x^2y$.
12. $4y^4-13y^2+4y^3-3y-20$ entre $2y+5$.
13. $5a^3x^2-3x^5-11ax^4+3a^4x-2a^5$ entre $3x^3-a^3+2ax^2$.
14. $2x^5y-x^6-3x^2y^4-xy^5$ entre $x^4-3x^3y+2x^2y^2+xy^3$.
15. $a^6-5a^5+31a^2-8a+21$ entre a^3-2a-7.
16. $m^6-m^5+5m^3-6m+9$ entre $m^4+3-m^2+m^3$.
17. $a^6+b^6-a^5b-4a^4b^2+6a^3b^3-3ab^5$ entre $a^2-2ab+b^2$.
18. $x^6-2x^4y^2+2x^3y^3-2x^2y^4+3xy^5-2y^6$ entre x^2-2y^2+xy.
19. $4y^3-2y^5+y^6-y^4-4y+2$ entre y^4+2-2y^2.
20. $3m^7-11m^5+m^4+18m^3-8m-3m^2+4$ entre m^4-3m^2+4.
21. $a^6+2a^5-3a^3-2a^4+2a^2-a-1$ entre a^3+a^2-a+1.
22. $24x^5-52x^4y+38x^3y^2-33x^2y^3-26xy^4+4y^5$ entre $8x^3-12x^2y-6xy^2+y^3$.
23. $5a^5+6a^4+5a^8-4a^7-8a^6-2a^3+4a^2-6a$ entre a^4-2a^2+2.
24. $x^7-3x^6+6x^5+x^2-3x+6$ entre x^3-2x^2+3x+6.
25. $3a^6+5a^5-9a^4-10a^3+8a^2+3a-4$ entre $3a^3+2a^2-5a-4$.
26. $5y^8-3y^7-11y^6+11y^5-17y^4-3y^3-4y^2-2y$ entre $5y^4-3y^3+4y^2+2y$.
27. $-m^7+5m^6n-14m^5n^2+20m^4n^3-13m^3n^4-9m^2n^5+20mn^6-4n^7$ entre $n^3+3m^2n-5mn^2-m^3$.
28. $x^{11}-5x^9y^2+8x^7y^4-6x^5y^6-5x^3y^8+3xy^{10}$ entre $x^5-2x^3y^2+3xy^4$.
29. $3a^9-15a^7+14a^6-28a^4+47a^3-28a^2+23a-10$ entre $3a^5-6a^3+2a^2-3a+2$.
30. $a^2-b^2+2bc-c^2$ entre $a+b-c$.
31. $-2x^2+5xy-xz-3y^2-yz+10z^2$ entre $2x-3y+5z$.
32. $x^3+y^3+z^3-3xyz$ entre $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz$.
33. a^5+b^5 entre $a+b$.
34. $21x^5-21y^5$ entre $3x-3y$.
35. $16x^8-16y^8$ entre $2x^2+2y^2$.
36. $x^{10}-y^{10}$ entre x^2-y^2.
37. $x^{15}+y^{15}$ entre x^3+y^3.
38. $x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-1$ entre $x^2+2xy+y^2+x+y+1$.
39. x^5+y^5 entre $x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$.

80 DIVISION DE POLINOMIOS CON EXPONENTES LITERALES

Ejemplos

(1) Dividir $3a^{x+5}+19a^{x+3}-10a^{x+4}-8a^{x+2}+5a^{x+1}$ entre a^2-3a+5.

Ordenando en orden descendente con relación a la a, tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
3a^{x+5}-10a^{x+4}+19a^{x+3}-8a^{x+2}+5a^{x+1} & a^2-3a+5 \\ \cline{2-2}
-3a^{x+5}+9a^{x+4}-15a^{x+3} & 3a^{x+3}-a^{x+2}+a^{x+1}. \quad R. \\ \cline{1-1}
\quad -a^{x+4}+4a^{x+3}-8a^{x+2} & \\
\quad\ \ a^{x+4}-3a^{x+3}+5a^{x+2} & \\ \cline{1-1}
\qquad a^{x+3}-3a^{x+2}+5a^{x+1} & \\
\qquad -a^{x+3}+3a^{x+2}-5a^{x+1} & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

EXPLICACION

La división $3a^{x+5} \div a^2 = 3a^{x+5-2} = 3a^{x+3}$.
La división $-a^{x+4} \div a^2 = -a^{x+4-2} = -a^{x+2}$.
La división $a^{x+3} \div a^2 = a^{x+3-2} = a^{x+1}$.

(2) Dividir $x^{3a}-17x^{3a-2}+x^{3a-1}+3x^{3a-4}+2x^{3a-3}-2x^{3a-5}$ entre $x^{2a-1}-2x^{2a-3}-3x^{2a-2}$.

Ordenamos en orden descendente con relación a x y tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
x^{3a}+x^{3a-1}-17x^{3a-2}+2x^{3a-3}+3x^{3a-4}-2x^{3a-5} & x^{2a-1}-3x^{2a-2}-2x^{2a-3} \\ \cline{2-2}
-x^{3a}+3x^{3a-1}+2x^{3a-2} & x^{a+1}+4x^{a}-3x^{a-1}+x^{a-2}. \\ \cline{1-1}
\quad 4x^{3a-1}-15x^{3a-2}+2x^{3a-3} & \\
\quad -4x^{3a-1}+12x^{3a-2}+8x^{3a-3} & \\ \cline{1-1}
\qquad -3x^{3a-2}+10x^{3a-3}+3x^{3a-4} & \\
\qquad\ \ 3x^{3a-2}-9x^{3a-3}-6x^{3a-4} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad x^{3a-3}-3x^{3a-4}-2x^{3a-5} & \\
\qquad\qquad -x^{3a-3}+3x^{3a-4}+2x^{3a-5} & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

EXPLICACION

La división $x^{3a} \div x^{2a-1} = x^{3a-(2a-1)} = x^{3a-2a+1} = x^{a+1}$.
La división $4x^{3a-1} \div x^{2a-1} = 4x^{3a-1-(2a-1)} = 4x^{3a-1-2a+1} = 4x^{a}$.
La división $-3x^{3a-2} \div x^{2a-1} = -3x^{3a-2-(2a-1)} = -3x^{3a-2-2a+1} = -3x^{a-1}$.
La división $x^{3a-3} \div x^{2a-1} = x^{3a-3-(2a-1)} = x^{3a-3-2a+1} = x^{a-2}$.

EJERCICIO 56

Dividir:

1. $a^{x+3}+a^x$ entre $a+1$.
2. $x^{n+2}+3x^{n+3}+x^{n+4}-x^{n+5}$ entre x^2+x.
3. $m^{a+4}-m^{a+3}+6m^{a+1}-5m^a+3m^{a-1}$ entre m^2-2m+3.
4. $a^{2n+3}+4a^{2n+2}+a^{2n+1}-2a^{2n}$ entre a^n+a^{n+1}.
5. $x^{2a+5}-3x^{2a+3}+2x^{2a+4}-4x^{2a+2}+2x^{2a+1}$ entre $x^{a+3}-2x^{a+1}$.
6. $a^{x+2}-2a^x+8a^{x-1}-3a^{x-2}$ entre $3a^{x-2}-2a^{x-1}+a^x$.
7. $a^{2x}-4a^{2x-2}+5a^{2x-3}+2a^{2x-1}-2a^{2x-4}$ entre $a^x-a^{x-1}+a^{x-2}$
8. $m^{2a-2}-m^{2a-1}-4m^{2a}+2m^{2a+1}+2m^{2a+2}-m^{2a+3}$ entre $m^{a-3}-m^{a-1}+m^{a-2}$.
9. $x^{2a-2}+x^{2a-3}-4x^{2a-4}-x^{2a-7}$ entre $-x^{a-3}+x^{a-1}-x^{a-2}$.
10. $a^{2n}b^3-a^{2n-1}b^4+a^{2n-2}b^5-2a^{2n-4}b^7+a^{2n-5}b^8$ entre $a^nb-a^{n-1}b^2+2a^{n-2}b^3-a^{n-3}b^4$.
11. $a^{m+x}+a^mb^x+a^xb^m+b^{m+x}$ entre a^x+b^x.
12. $a^x-ab^{n-1}-a^{x-1}b+b^n$ entre $a-b$.
13. $3a^{5m-3}-23a^{5m-2}+5a^{5m-1}+46a^{5m}-30a^{5m+1}$ entre $a^{3m-3}+6a^{3m-1}-8a^{3m-2}$.
14. $2x^{3a+1}y^{2x-3}-4x^{3a}y^{2x-2}-28x^{3a-2}y^{2x}+30x^{3a-3}y^{2x+1}$ entre $-x^{a+2}y^{x-1}-3x^ay^{x+1}+4x^{a+1}y^x$.

81 DIVISION DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Ejemplo

Dividir $\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y$.

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 & \frac{2}{3}x - \frac{3}{2}y \\ \hline
-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^2y & \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2. \quad \text{R.} \\
\quad -\frac{2}{9}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 & \\
\quad \frac{2}{9}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 & \\
\qquad \frac{1}{6}xy^2 - \frac{3}{8}y^3 & \\
\qquad -\frac{1}{6}xy^2 + \frac{3}{8}y^3 &
\end{array}$$

Obsérvese que todo quebrado que se obtenga en el cociente al dividir, lo mismo que los quebrados que se obtienen al multiplicar el cociente por el divisor, deben reducirse a su más simple expresión.

EJERCICIO 57

Dividir:

1. $\frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{36}ab - \frac{1}{6}b^2$ entre $\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b$.
2. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{10}xy - \frac{1}{3}y^2$ entre $x - \frac{2}{5}y$.
3. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{35}{36}x^2y + \frac{2}{3}xy^2 - \frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}xy + \frac{1}{4}y^2$.
4. $\frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{8}a^2b - b^3 + \frac{5}{3}ab^2$ entre $\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b$.
5. $\frac{3}{5}m^4 + \frac{1}{10}m^3n - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{1}{6}mn^3 - n^4$ entre $\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn$.
6. $\frac{3}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{37}{40}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5} + \frac{19}{30}x$ entre $2x^3 - \frac{1}{3}x + 2$.
7. $\frac{9}{4}a^4 - a^3x + \frac{13}{18}ax^3 - \frac{1}{12}a^2x^2 - \frac{1}{3}x^4$ entre $\frac{3}{2}a^2 - ax + \frac{2}{3}x^2$.
8. $\frac{1}{14}x^5 + \frac{139}{280}x^3y^2 - \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{101}{420}x^4y + \frac{5}{12}xy^4$ entre $\frac{2}{7}x^3 - \frac{1}{5}x^2y + \frac{1}{2}xy^2$.
9. $\frac{3}{8}x^5 + \frac{21}{40}x^4 - \frac{47}{120}x^3 + \frac{29}{120}x^2 + \frac{1}{10}x - \frac{1}{10}$ entre $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^3$.
10. $\frac{39}{40}m^4n^2 - \frac{101}{60}m^2n^3 + \frac{1}{2}m^5 - \frac{5}{6}m^4n + \frac{7}{6}mn^4 - \frac{5}{8}n^5$ entre $\frac{3}{4}m^3 - \frac{1}{2}m^2n + \frac{2}{5}mn^2 - \frac{1}{4}n^3$.

82 DIVISION DE POLINOMIOS POR EL METODO DE COEFICIENTES SEPARADOS

La división por coeficientes separados, que abrevia mucho la operación, puede usarse en los mismos casos que en la multiplicación.

1) **División de dos polinomios que contengan una sola letra y estén ordenados en el mismo orden con relación a esa letra.**

Ejemplo

Dividir $8x^6 - 16x^5 + 6x^4 + 24x^2 + 18x - 36$ entre $4x^3 + 3x - 6$ por coeficientes separados.

Escribimos solamente los coeficientes con sus signos teniendo cuidado de poner cero donde falte algún término y se efectúa la división con ellos:

$$\begin{array}{l|l}
8 - 16 + 6 + 0 + 24 + 18 - 36 & 4 + 0 + 3 - 6 \\ \hline
-8 - 0 - 6 + 12 & 2 - 4 + 0 + 6 \\
\quad -16 + 0 + 12 + 24 & \\
\quad 16 + 0 + 12 - 24 & \\
\qquad +24 + 0 + 18 - 36 & \\
\qquad -24 - 0 - 18 + 36 &
\end{array}$$

El primer término del cociente tiene x^3 porque proviene de dividir x^6 entre x^3 y como en el dividendo y divisor el exponente de x disminuye una unidad en cada término, en el cociente también disminuirá una unidad en cada término, luego el cociente es:

$2x^3 - 4x^2 + 6$. R.

2) **División de dos polinomios homogéneos que contengan solamente dos letras.**

Ejemplo

Dividir $a^5 - 7a^4b + 21a^3b^2 - 37a^2b^3 + 38ab^4 - 24b^5$ entre $a^2 - 3ab + 4b^2$ por coeficientes separados.

Tendremos:

$$\begin{array}{l|l}
1 - 7 + 21 - 37 + 38 - 24 & 1 - 3 + 4 \\ \hline
-1 + 3 - 4 & 1 - 4 + 5 - 6 \\
\quad -4 + 17 - 37 & \\
\quad 4 - 12 + 16 & \\
\qquad 5 - 21 + 38 & \\
\qquad -5 + 15 - 20 & \\
\qquad\quad -6 + 18 - 24 & \\
\qquad\quad 6 - 18 + 24 &
\end{array}$$

El primer término del cociente tiene a^3 porque proviene de dividir a^5 entre a^2. Como el cociente es homogéneo y en el dividendo y divisor el exponente de a disminuye una unidad en cada término y el de b aumenta una unidad en cada término, el cociente será:

$a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 6b^3$. R.

EJERCICIO 58

Dividir por coeficientes separados:

$x^5-x^4+x^2-x$ entre x^3-x^2+x.

$x^7+x^6-11x^5+3x^4-13x^3+19x^2-56$ entre x^3-2x^2-7.

$a^6+a^5b-7a^4b^2+12a^3b^3-13a^2b^4+7ab^5-b^6$ entre $a^2-2ab+b^2$.

$m^6+2m^5n-5m^4n^2+20m^3n^3-19m^2n^4-10mn^5-n^6$ entre $m^3-4mn^2-n^3$.

$x^8-2x^6-50x^4+58x^2-15$ entre x^4+6x^2-5.

$a^{14}+9a^{10}-7a^{12}+23a^8-52a^6+42a^4-20a^2$ entre $a^8-4a^6+3a^4-2a^2$.

$3x^{15}-20x^{12}-70x^6+51x^9+46x^3-20$ entre $3x^6-8x^3+10$.

$53m^{20}-12m^{24}+m^{28}-127m^{16}+187m^{12}-192m^8+87m^4-45$ entre $m^{12}-7m^8+9m^4-15$.

$2x^7-6x^6y-8x^5y^2-20x^4y^3-24x^3y^4-18x^2y^5-4y^7$ entre $2x^2+4y^2$.

$6a^9-12a^7+2a^6-36a^5+6a^4-16a^3+38a^2-44a+14$ entre a^4-2a^2+a-7.

$n^{10}-6n^8+5n^7+13n^6-23n^5-8n^4+44n^3-12n^2-32n+16$ entre $n^6-3n^4+5n^3-8n+4$.

$3x^7-4x^6y-15x^5y^2+29x^4y^3-13x^3y^4+5xy^6-3y^7$ entre $x^3-5xy^2+3y^3$.

$x^{16}-4x^{14}y^2-10x^{12}y^4+21x^{10}y^6+28x^8y^8-23x^6y^{10}+9x^4y^{12}+33x^2y^{14}-6y^{16}$ entre $x^6-4x^4y^2-5x^2y^4+y^6$.

$a^{m+2}-3a^{m+1}-5a^m+20a^{m-1}-25a^{m-3}$ entre a^2-5.

$7a^{2x+5}-35a^{2x+4}+6a^{2x+3}-78a^{2x+2}-5a^{2x+1}-42a^{2x}-7a^{2x-1}$ entre $a^x+6a^{x+1}+7a^{x+3}$.

$6x^{2a+3}-4x^{2a+2}-28x^{2a+1}+21x^{2a}-46x^{2a-1}+19x^{2a-2}-12x^{2a-3}-6x^{2a-4}$ entre $6x^{a+1}-4x^a+2x^{a-1}+x^{a-2}$.

$6a^{5x+3}-23a^{5x+2}+12a^{5x+1}-34a^{5x}+22a^{5x-1}-15a^{5x-2}$ entre $a^{2x+2}-a^{2x}-3a^{2x+1}-5a^{2x-1}$.

83 COCIENTE MIXTO

En todos los casos de división estudiados hasta ahora el dividendo era divisible exactamente por el divisor. Cuando el dividendo no es divisible exactamente por el divisor, la división no es exacta, nos da un residuo y esto origina los **cocientes mixtos**, así llamados porque constan de entero y quebrado.

Cuando la división no es exacta debemos detenerla cuando el primer término del residuo es de grado inferior al primer término del divisor con relación a una misma letra, o sea, cuando el exponente de una letra en el residuo es menor que el exponente de la misma letra en el divisor y sumamos al cociente el quebrado que se forma, poniendo por numerador el residuo y por denominador el divisor.

Ejemplos

(1) Dividir x^2-x-6 entre $x+3$.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & -\ x & -\ 6 & x+3 \\ \cline{4-4} -x^2 & -\ 3x & & x-4+\dfrac{6}{x+3}.\ \text{R.} \\ \cline{1-3} & -\ 4x & -\ 6 & \\ & 4x & +\ 12 & \\ \cline{2-3} & & 6 & \end{array}$$

El residuo no tiene x, así que es de grado cero con relación a la x y el divisor es de primer grado con relación a la x, luego aquí detenemos la división porque el residuo es de grado inferior al divisor. Ahora añadimos al cociente $x-4$ el quebrado $\dfrac{6}{x+3}$, de modo semejante a como procedemos en Aritmética cuando nos sobra un residuo.

(2) Dividir $6m^4-4m^3n^2-3m^2n^4+4mn^6-n^8$ entre $2m^2-n^4$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6m^4 & -\ 4m^3n^2 & -\ 3m^2n^4 & +\ 4mn^6 & -\ n^8 & 2m^2-n^4 \\ \cline{6-6} -6m^4 & & +\ 3m^2n^4 & & & 3m^2-2mn^2+\dfrac{2mn^6-n^8}{2m^2-n^4}.\ \text{R.} \\ \cline{1-3} & -\ 4m^3n^2 & & +\ 4mn^6 & & \\ & 4m^3n^2 & & -\ 2mn^6 & & \\ \cline{2-5} & & & 2mn^6 & -\ n^8 & \end{array}$$

Hemos detenido la operación al ser el primer término del residuo $2mn^6$ en el cual la m tiene de exponente 1 mientras que en el primer término del divisor la m tiene de exponente 2 y hemos añadido al cociente el quebrado que se forma poniendo por numerador el residuo y por denominador el divisor.

NOTA

En el número **190**, una vez conocidos los cambios de signos en las fracciones, se tratará esta materia más ampliamente.

EJERCICIO 59

Hallar el cociente mixto de:

1. a^2+b^2 entre a^2.
2. a^4+2 entre a^3.
3. $9x^3+6x^2+7$ entre $3x^2$.
4. $16a^4-20a^3b+8a^2b^2+7ab^3$ entre $4a^2$.
5. $x^2+7x+10$ entre $x+6$.
6. x^2-5x+7 entre $x-4$.
7. m^4-11m^2+34 entre m^2-3.
8. $x^2-6xy+y^2$ entre $x+y$.
9. x^3-x^2+3x+2 entre x^2-x+1.
10. x^3+y^3 entre $x-y$.
11. x^5+y^5 entre $x-y$.
12. x^3+4x^2-5x+8 entre x^2-2x+1.
13. $8a^3-6a^2b+5ab^2-9b^3$ entre $2a-3b$.
14. $x^5-3x^4+9x^2+7x-4$ entre x^2-3x+2

84 VALOR NUMERICO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON EXPONENTES ENTEROS PARA VALORES POSITIVOS Y NEGATIVOS

Conociendo ya las operaciones fundamentales con cantidades negativas, así como las reglas de los signos en la multiplicación y división, podemos hallar el valor de expresiones algebraicas para cualesquiera valores de las letras, teniendo presente lo siguiente:

85 POTENCIAS DE CANTIDADES NEGATIVAS

1) **Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva,** porque equivale a un producto en que entra un número par de factores negativos.

Así, $(-2)^2 = +4$ porque $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$.
$(-2)^4 = +16$ porque $(-2)^4 = (-2)^2 \times (-2)^2 = (+4) \times (+4) = +16$.
$(-2)^6 = +64$ porque $(-2)^6 = (-2)^4 \times (-2)^2 = (+16) \times (+4) = +64$.
$(-2)^8 = +256$ porque $(-2)^8 = (-2)^6 \times (-2)^2 = (+64) \times (+4) = +256$.

y así sucesivamente.

En general, siendo N un número entero se tiene: $(-a)^{2N} = a^{2N}$.

2) **Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa** porque equivale a un producto en que entra un número impar de factores negativos.

Así, $(-2)^1 = -2$.
$(-2)^3 = -8$ porque $(-2)^3 = (-2)^2 \times (-2) = (+4) \times (-2) = -8$.
$(-2)^5 = -32$ porque $(-2)^5 = (-2)^4 \times (-2) = (+16) \times (-2) = -32$.
$(-2)^7 = -128$ porque $(-2)^7 = (-2)^6 \times (-2) = (+64) \times (-2) = -128$.

y así sucesivamente.

En general, se tiene: $(-a)^{2N+1} = -a^{2N+1}$.

Ejemplos

(1) Valor numérico de $x^3 - 3x^2 + 2x - 4$ para $x = -2$.

Sustituyendo x por -2, tenemos:

$$\begin{aligned}&(-2)^3 - 3(-2)^2 + 2(-2) - 4\\ &= -8 - 3(4) + 2(-2) - 4\\ &= -8 - 12 - 4 - 4\\ &= -28. \quad R.\end{aligned}$$

(2) Valor numérico de $\frac{a^4}{4} - \frac{3a^2b}{6} + \frac{5ab^2}{3} - b^3$ para $a = -2$, $b = -3$.

Tendremos: $\frac{a^4}{4} - \frac{3a^2b}{6} + \frac{5ab^2}{3} - b^3$

$$\begin{aligned}&= \frac{(-2)^4}{4} - \frac{3(-2)^2(-3)}{6} + \frac{5(-2)(-3)^2}{3} - (-3)^3\\ &= \frac{16}{4} - \frac{3(4)(-3)}{6} + \frac{5(-2)(9)}{3} - (-27)\\ &= 4 - \left(\frac{-36}{6}\right) + \left(\frac{-90}{3}\right) + 27\\ &= 4 - (-6) + (-30) + 27\\ &= 4 + 6 - 30 + 27 = 7. \quad R.\end{aligned}$$

NOTA

Para ejercicios de valor numérico de expresiones algebraicas con exponentes cero, negativos o fraccionarios, véase *Teoría de los Exponentes*, pág. 407.

EJERCICIO 60

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a = -1, \quad b = 2, \quad c = -\frac{1}{2}:$$

1. $a^2 - 2ab + b^2$.
2. $3a^3 - 4a^2b + 3ab^2 - b^3$.
3. $a^4 - 3a^3 + 2ac - 3bc$.
4. $a^5 - 8a^4c + 16a^3c^2 - 20a^2c^3 + 40ac^4 - c^5$.
5. $(a-b)^2 + (b-c)^2 - (a-c)^2$.
6. $(b+a)^3 - (b-c)^3 - (a-c)^3$.
7. $\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} - \frac{bc}{a}$.
8. $(a+b+c)^2 - (a-b-c)^2 + c$.
9. $3(2a+b) - 4a(b+c) - 2c(a-b)$.

Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes para

$$a = 2, \quad b = \frac{1}{3}, \quad x = -2, \quad y = -1, \quad m = 3, \quad n = \frac{1}{2}:$$

10. $\frac{x^4}{8} - \frac{x^2y}{2} + \frac{3xy^2}{2} - y^3$.
11. $(a-x)^2 + (x-y)^2 + (x^2-y^2)(m+x-n)$.
12. $-(x-y) + (x^2+y^2)(x-y-m) + 3b(x+y+n)$.
13. $(3x-2y)(2n-4m) + 4x^2y^2 - \frac{x-y}{2}$.
14. $\frac{4x}{3y} - \frac{x^3}{2+y^3} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{b}\right)x + x^4 - m$.
15. $x^2(x-y+m) - (x-y)(x^2+y^2-n) + (x+y)^2(m^2-2n)$.
16. $\frac{3a}{x} + \frac{2y}{m} + \frac{3n}{y} - \frac{m}{n} + 2(x^3 - y^2 + 4)$.

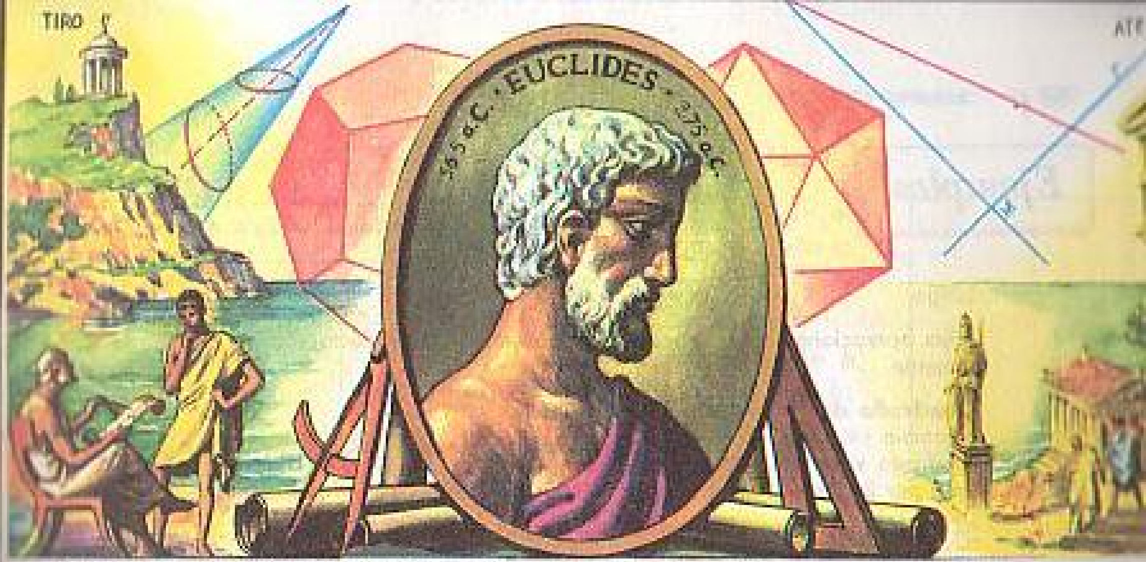
EJERCICIO 61

MISCELANEA

SOBRE SUMA, RESTA, MULTIPLICACION Y DIVISION

1. A las 7 a.m. el termómetro marca $+5°$ y de las 7 a las 10 a.m. baja a razón de $3°$ por hora. Expresar la temperatura a las 8 a.m., 9 a.m. y 10 a.m.
2. Tomando como escala 1 cm = 10 m, representar gráficamente que un punto B está situado a $+40$ m de A y otro punto C está situado a -35 m de B.
3. Sumar $x^2 - 3xy$ con $3xy - y^2$ y el resultado restarlo de x^2.
4. ¿Qué expresión hay que añadir a $3x^2 - 5x + 6$ para que la suma sea $3x$?
5. Restar $-2a^2 + 3a - 5$ de 3 y sumar el resultado con $8a + 5$.
6. Simplificar $-3x^2 - \{-[4x^2 + 5x - (x^2 - \overline{x+6})]\}$.
7. Simplificar $(x+y)(x-y) - (x+y)^2$.
8. Valor numérico de $3(a+b) - 4(c-b) + \sqrt{\frac{c-b}{-a}}$ para $a=2$, $b=3$, $c=1$.
9. Restar $x^2 - 3xy + y^2$ de $3x^2 - 5y^2$ y sumar la diferencia con el resultado de restar $5xy + x^2$ de $2x^2 + 5xy + 6y^2$.

10. Multiplicar $\frac{2}{3}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{5}b^2$ por $\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}ab-2b^2$.
11. Dividir la suma de $x^5-x^3+5x^2$, $-2x^4+2x^2-10x$, $6x^3-6x+30$ entre x^2-2x+6.
12. Restar el cociente de $\frac{1}{4}a^3-\frac{1}{30}ab^2+\frac{1}{15}b^3$ entre $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b$ de $\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{5}b^2$.
13. Restar la suma de $-3ab^2-b^3$ y $2a^2b+3ab^2-b^3$ de $a^3-a^2b+b^3$ y la diferencia multiplicarla por a^2-ab+b^2.
14. Restar la suma de x^5-5x^3+4x, $-6x^3-6x+3$, $-8x^3+8x-3$ de $2x^5-16x^3+5x+12$ y dividir esta diferencia entre x^2-x+3.
15. Probar que $(2+x)^2(1+x^2)-(x^2-2)(x^2+x-3)=x^2(3x+10)+2(3x-1)$.
16. Hallar el valor numérico de $(x+y)^2(x-y)^2+2(x+y)(x-y)$ para $x=-2$, $y=1$.
17. ¿Qué expresión hay que sumar a la suma de $x+4$, $x-6$ y x^2+2x+8 para obtener $5x^2-4x+3$?
18. Restar $-\{3a+(-b+a)-2(a+b)\}$ de $-2[(a+b)-(a-b)]$.
19. Multiplicar $5x+[-(3x-\overline{x-y})]$ por $8x+[-2x+(-x+y)]$.
20. Restar el cociente de $\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{24}x^2y+\frac{5}{12}xy^2+\frac{1}{3}y^3$ entre $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}xy+y^2$ de $2x+[-5x-(x-y)]$.
21. Probar que $[x^2-(3x+2)][x^2+(-x+3)]=x^2(x^2-4x+4)-(7x+6)$.
22. ¿Qué expresión hay que sumar al producto de $[x(x+y)-x(x-y)][2(x^2+y^2)-3(x^2-y^2)]$ para obtener $2x^3y+3xy^3$?
23. Restar $-x^2-3xy+y^2$ de cero y multiplicar la diferencia por el cociente de dividir x^3-y^3 entre $x-y$.
24. Simplificar $(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x+y)(x^2-xy+y^2)$.
25. Hallar el valor numérico de $\sqrt{\frac{ab}{c}}+2(b-a)\sqrt{\frac{9b}{a^2}}-3(c-b)\sqrt{\frac{c}{b}}$ para $a=4$, $b=9$, $c=25$.
26. ¿Por cuál expresión hay que dividir el cociente de $x^3+3x^2-4x-12$ entre $x+3$ para obtener $x-2$?
27. Simplificar $4x^2-\{3x-(x^2-\overline{4+x})\}+[x^2-\{x+(-3)\}]$ y hallar su valor para $x=-2$.
28. ¿De cuál expresión hay que restar $-18x^3+14x^2+84x-45$ para que la diferencia dividida entre x^2+7x-5 dé como cociente x^2-9?
29. Probar que $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)=a^4-[3a+2(a+2)-4(a+1)-a+b^4]$.
30. Restar $-x^3-5x^2+6$ de 3 y sumar la diferencia con la suma de x^3-x+2 y $-[x^2+(-3x+4)-(-x+3)]$.



EUCLIDES (365-275 A. C.) Uno de los más grandes matemáticos griegos. Fue el primero que estableció un método riguroso de demostración geométrica. La Geometría construida por Euclides se mantuvo incólume hasta el siglo XIX. La piedra angular de su geometría es el Postulado: "Por un punto exterior a u recta sólo puede trazarse una perpendicular a la m ma y sólo una". El libro en que recoge sus investig ciones lo tituló "Elementos", es conocido en to los ámbitos y ha sido traducido a los idiomas cult

CAPITULO V

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

I. PRODUCTOS NOTABLES

86 Se llama productos notables a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación.

87 CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES

Elevar al cuadrado $a+b$ equivale a multiplicar este binomio por sí mismo y tendremos: $(a+b)^2=(a+b)(a+$

Efectuando este producto, tenemos:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

o sea $(a+b)^2=a^2+2ab+$

luego, el cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad más el duplo de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplos

(1) Desarrollar $(x+4)^2$.

Cuadrado del primero. . . . . x^2
Duplo del primero por el segundo. . . . . . $2x \times 4 = 8x$
Cuadrado del segundo. 16

Luego $(x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$. R.

Estas operaciones deben hacerse *mentalmente* y el producto escribirse directamente.

Cuadrado de un monomio. *Para elevar un monomio al cuadrado se eleva su coeficiente al cuadrado y se multiplica el exponente de cada letra por 2.* Sea el monomio $4ab^2$. Decimos que $(4ab^2)^2 = 4^2a^{1\times 2}b^{2\times 2} = 16a^2b^4$.

En efecto: $(4ab^2)^2 = 4ab^2 \times 4ab^2 = 16a^2b^4$.

Del propio modo: $(5x^3y^4z^5)^2 = 25x^6y^8z^{10}$.

(2) Desarrollar $(4a+5b^2)^2$. →
Cuadrado del 1° . . . . $(4a)^2 = 16a^2$.
Duplo del 1° por el 2°. . . . $2 \times 4a \times 5b^2 = 40ab^2$.
Cuadrado del 2° . . . . $(5b^2)^2 = 25b^4$.

Luego $(4a+5b^2)^2 = 16a^2 + 40ab^2 + 25b^4$. R.

Las operaciones, que se han detallado para mayor facilidad, *no deben escribirse sino verificarse mentalmente.*

(3) Desarrollar $(3a^2+5x^3)^2$.

$$(3a^2+5x^3)^2 = 9a^4 + 30a^2x^3 + 25x^6. \quad R.$$

(4) Efectuar $(7ax^4+9y^5)(7ax^4+9y^5)$.

$$(7ax^4+9y^5)(7ax^4+9y^5) = (7ax^4+9y^5)^2 = 49a^2x^8 + 126ax^4y^5 + 81y^{10}. \quad R.$$

EJERCICIO 62

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(m+3)^2$.
2. $(5+x)^2$.
3. $(6a+b)^2$.
4. $(9+4m)^2$.
5. $(7x+11)^2$.
6. $(x+y)^2$.
7. $(1+3x^2)^2$.
8. $(2x+3y)^2$.
9. $(a^2x+by^2)^2$.
10. $(3a^3+8b^4)^2$.
11. $(4m^5+5n^6)^2$.
12. $(7a^2b^3+5x^4)^2$.
13. $(4ab^2+5xy^3)^2$.
14. $(8x^2y+9m^3)^2$.
15. $(x^{10}+10y^{12})^2$.
16. $(a^m+a^n)^2$.
17. $(a^x+b^{x+1})^2$.
18. $(x^{a+1}+y^{x-2})^2$.

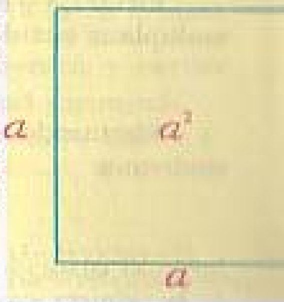
REPRESENTACION GRAFICA DEL CUADRADO DE LA SUMA DE DOS CANTIDADES

El cuadrado de la suma de dos cantidades puede representarse geométricamente cuando los valores son positivos. Véanse los siguientes pasos:

Sea $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

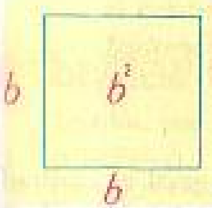
Construimos un cuadrado de a unidades de lado, es decir, de lado a:

FIGURA 10



Construimos un cuadrado de b unidades de lado, es decir, de lado b:

FIGURA 11



Construimos dos rectángulos de largo a y ancho b:

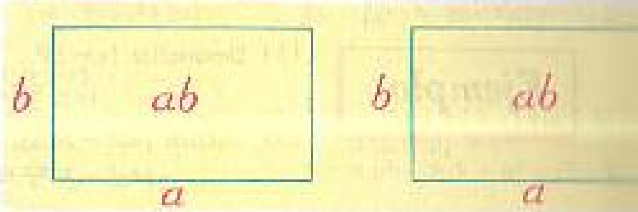


FIGURA 12

Uniendo estas cuatro figuras como se indica en la figura 13, formaremos un cuadrado de $(a+b)$ unidades de lado. El área de este cuadrado es $(a+b)(a+b) = (a+b)^2$, y como puede verse en la figura 13, esta área está formada por un cuadrado de área a^2, un cuadrado de área b^2 y dos rectángulos de área ab cada uno o sea $2ab$). Luego:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

FIGURA 13

88 CUADRADO DE LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

Elevar $(a-b)$ al cuadrado equivale a multiplicar esta diferencia por sí misma; luego: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$.

Efectuando este producto, tendremos:

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline a^2 - ab \\ -ab + b^2 \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 \end{array}$$

o sea $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

luego, **el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el duplo de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad.**

Ejemplos

(1) Desarrollar $(x-5)^2$.

$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$. R.

(2) Efectuar $(4a^2 - 3b^3)^2$.

$(4a^2 - 3b^3)^2 = 16a^4 - 24a^2b^3 + 9b^6$. R.

EJERCICIO 63

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(a-3)^2$.
2. $(x-7)^2$.
3. $(9-a)^2$.
4. $(2a-3b)^2$.
5. $(4ax-1)^2$.
6. $(a^3-b^3)^2$.
7. $(3a^4-5b^2)^2$.
8. $(x^2-1)^2$.
9. $(x^5-3ay^2)^2$.
10. $(a^7-b^7)^2$.
11. $(2m-3n)^2$.
12. $(10x^3-9xy^5)^2$.
13. $(x^m-y^n)^2$.
14. $(a^{x-2}-5)^2$.
15. $(x^{a+1}-3x^{a-2})^2$.

89 PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

Sea el producto $(a+b)(a-b)$.

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a - b \\ \hline a^2 + ab \\ -ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2 \end{array}$$

o sea $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

luego, **la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo (en la diferencia) menos el cuadrado del sustraendo.**

Ejemplos

(1) Efectuar $(a+x)(a-x)$.

$(a+x)(a-x) = a^2 - x^2$. R.

(2) Efectuar $(2a+3b)(2a-3b)$

$(2a+3b)(2a-3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$. R.

(3) Efectuar $(5a^{m+1} + 3a^m)(3a^m - 5a^{m+1})$.

Como el orden de los sumandos no altera la suma, $5a^{m+1} + 3a^m$ es lo mismo que $3a^m + 5a^{m+1}$, pero téngase presente que $3a^m - 5a^{m+1}$ no es lo mismo que $5a^{m+1} - 3a^m$. Por eso hay que fijarse en la *diferencia* y escribir el cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo.

Tendremos: $(5a^{m+1} + 3a^m)(3a^m - 5a^{m+1}) = (3a^m)^2 - (5a^{m+1})^2 = 9a^{2m} - 25a^{2m+2}$. R.

EJERCICIO 64

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+y)(x-y)$.
2. $(m-n)(m+n)$.
3. $(a-x)(x+a)$.
4. $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$.
5. $(2a-1)(1+2a)$.
6. $(n-1)(n+1)$.
7. $(1-3ax)(3ax+1)$.
8. $(2m+9)(2m-9)$.
9. $(a^3-b^2)(a^3+b^2)$.
10. $(y^2-3y)(y^2+3y)$.
11. $(1-8xy)(8xy+1)$.
12. $(6x^2-m^2x)(6x^2+m^2x)$.
13. $(a^m+b^n)(a^m-b^n)$.
14. $(3x^a-5y^m)(5y^m+3x^a)$.
15. $(a^{x+1}-2b^{x-1})(2b^{x-1}+a^{x+1})$.

(4) Efectuar $(a+b+c)(a+b-c)$.

Este producto puede convertirse en la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, de este modo:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a+b-c) &= [(a+b)+c]\,[(a+b)-c] \\ &= (a+b)^2 - c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - c^2. \quad \text{R.}\end{aligned}$$

donde hemos desarrollado $(a+b)^2$ por la regla del 1er. caso.

(5) Efectuar $(a+b+c)(a-b-c)$.

Introduciendo los dos últimos términos del primer trinomio en un paréntesis precedido del signo $+$, lo cual no hace variar los signos, y los dos últimos términos del segundo trinomio en un paréntesis precedido del signo $-$, para lo cual hay que cambiar los signos, tendremos:

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b-c) &= [a+(b+c)]\,[a-(b+c)] \\ &= a^2 - (b+c)^2 \\ &= a^2 - (b^2 + 2bc + c^2) \\ &= a^2 - b^2 - 2bc - c^2. \quad \text{R.}\end{aligned}$$

(6) Efectuar $(2x+3y-4z)(2x-3y+4z)$.

$$\begin{aligned}(2x+3y-4z)(2x-3y+4z) &= [2x+(3y-4z)]\,[2x-(3y-4z)] \\ &= (2x)^2 - (3y-4z)^2 \\ &= 4x^2 - (9y^2 - 24yz + 16z^2) \\ &= 4x^2 - 9y^2 + 24yz - 16z^2. \quad \text{R.}\end{aligned}$$

EJERCICIO 65

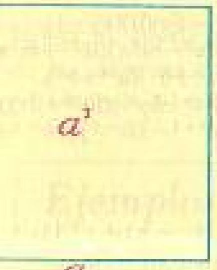
Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+y+z)(x+y-z)$.
2. $(x-y+z)(x+y-z)$.
3. $(x+y+z)(x-y-z)$.
4. $(m+n+1)(m+n-1)$.
5. $(m-n-1)(m-n+1)$.
6. $(x+y-2)(x-y+2)$.
7. $(n^2+2n+1)(n^2-2n-1)$.
8. $(a^2-2a+3)(a^2+2a+3)$.
9. $(m^2-m-1)(m^2+m-1)$.
10. $(2a-b-c)(2a-b+c)$.
11. $(2x+y-z)(2x-y+z)$.
12. $(x^2-5x+6)(x^2+5x-6)$.
13. $(a^2-ab+b^2)(a^2+b^2+ab)$.
14. $(x^3-x^2-x)(x^3+x^2+x)$.

REPRESENTACION GRAFICA DEL PRODUCTO DE LA SUMA POR LA DIFERENCIA DE DOS CANTIDADES

El producto de la suma por la diferencia de dos cantidades puede representarse geométricamente cuando los valores de dichas cantidades son positivos. Véanse los siguientes pasos:

Sea $$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

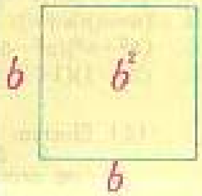


Construimos un cuadrado de $\underline{a}$ unidades de lado, es decir, de lado a:

FIGURA 14

Construimos un cuadrado de $\underline{b}$ unidades de lado, es decir, de lado b:

FIGURA 15



Al cuadrado de lado a le quitamos el cuadrado de lado b (figura 16), y trazando la línea de puntos obtenemos el rectángulo c, cuyos lados son b y $(a-b)$. Si ahora trasladamos el rectángulo c en la forma indicada por la flecha en la figura 17, obtenemos el rectángulo A B C D, cuyos lados son $(a+b)$ y $(a-b)$, y cuya área (figura 18) será:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

FIGURA 16

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$
$$(10+6)(10-6)=(10)^2-(6)^2$$
$$16\times 4=100-36$$
$$=64 \quad \text{R.}$$

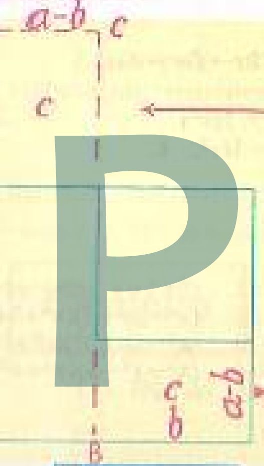


FIGURA 17

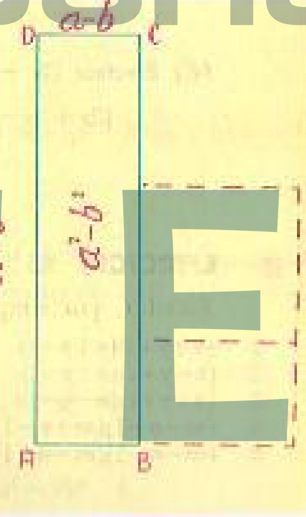


FIGURA 18

(90) CUBO DE UN BINOMIO

1) Elevemos $a+b$ al cubo.

Tendremos: $(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

o sea $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

lo que nos dice que **el cubo de la suma de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad más el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.**

2) Elevemos $a-b$ al cubo. Tendremos: $(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)$

Efectuando esta multiplicación, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \\ -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

o sea $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

lo que nos dice que **el cubo de la diferencia de dos cantidades es igual al cubo de la primera cantidad, menos el triplo del cuadrado de la primera por la segunda, más el triplo de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda cantidad.**

Ejemplos

(1) Desarrollar $(a+1)^3$.

$(a+1)^3=a^3+3a^2(1)+3a(1^2)+1^3=a^3+3a^2+3a+1.$ R.

(2) Desarrollar $(x-2)^3$.

$(x-2)^3=x^3-3x^2(2)+3x(2^2)-2^3=x^3-6x^2+12x-8.$ R.

(3) Desarrollar $(4x+5)^3$.

$(4x+5)^3=(4x)^3+3(4x)^2(5)+3(4x)(5^2)+5^3=64x^3+240x^2+300x+125.$ R.

(4) Desarrollar $(x^2-3y)^3$.

$(x^2-3y)^3=(x^2)^3-3(x^2)^2(3y)+3x^2(3y)^2-(3y)^3=x^6-9x^4y+27x^2y^2-27y^3.$ R.

EJERCICIO 66

Desarrollar:

1. $(a+2)^3$.	4. $(n-4)^3$.	7. $(2+y^2)^3$.	10. $(a^2-2b)^3$.
2. $(x-1)^3$.	5. $(2x+1)^3$.	8. $(1-2n)^3$.	11. $(2x+3y)^3$.
3. $(m+3)^3$.	6. $(1-3y)^3$.	9. $(4n+3)^3$.	12. $(1-a^2)^3$.

91 PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA $(x+a)(x+b)$

La multiplicación nos da:

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x+3 \\ \hline x^2+2x \\ 3x+6 \\ \hline x^2+5x+6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x-3 \\ x-4 \\ \hline x^2-3x \\ -4x+12 \\ \hline x^2-7x+12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x-2 \\ x+5 \\ \hline x^2-2x \\ +5x-10 \\ \hline x^2+3x-10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x+6 \\ x-4 \\ \hline x^2+6x \\ -4x-24 \\ \hline x^2+2x-24 \end{array}$$

En los cuatro ejemplos expuestos se cumplen las siguientes reglas:

1) El primer término del producto es el producto de los primeros términos de los binomios.

2) El coeficiente del segundo término del producto es la suma algebraica de los segundos términos de los binomios y en este término la x está elevada a un exponente que es la mitad del que tiene esta letra en el primer término del producto.

3) El tercer término del producto es el producto de los segundos términos de los binomios.

PRODUCTO DE DOS BINOMIOS DE LA FORMA $(mx+a)(nx+b)$

El producto de dos binomios de esta forma, en los cuales los términos en x tienen distintos coeficientes, puede hallarse fácilmente siguiendo los pasos que se indican en el siguiente esquema.

Sea, hallar el producto de $(3x+5)(4x+6)$:

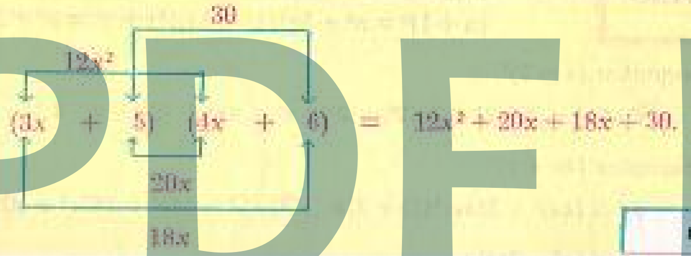


FIGURA 19

Reduciendo los términos semejantes tenemos: $12x^2+38x+30$ R.

Ejemplos

(1) Multiplicar $(x+7)(x-2)$.

Coeficiente del segundo término .... $7-2=5$
Tercer término .... $7\times(-2)=-14$

luego $(x+7)(x-2)=x^2+5x-14$. R.

(2) Efectuar $(x-7)(x-6)$.

Coeficiente del 2° término .... $(-7)+(-6)=-13$
Tercer término .... $(-7)\times(-6)=+42$.

luego $(x-7)(x-6)=x^2-13x+42$. R.

Los pasos intermedios deben suprimirse y el producto escribirse directamente sin escribir las operaciones intermedias.

(3) Efectuar $(a-11)(a+9)$.

$(a-11)(a+9)=a^2-2a-99$. R.

(4) Efectuar $(x^2+7)(x^2+3)$.

$(x^2+7)(x^2+3)=x^4+10x^2+21$. R.

Obsérvese que como el exponente de x en el primer término del producto es 4, el exponente de x en el segundo término es la mitad de 4, o sea x^2.

(5) Efectuar $(x^3-12)(x^3-3)$.

$(x^3-12)(x^3-3)=x^6-15x^3+36$. R.

EJERCICIO 67

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(a+1)(a+2)$.	7. $(x-3)(x-1)$.	13. $(n^2-1)(n^2+20)$.	19. $(ab+5)(ab-6)$.
2. $(x+2)(x+4)$.	8. $(x-5)(x+4)$.	14. $(n^3+3)(n^3-6)$.	20. $(xy^2-9)(xy^2+12)$.
3. $(x+5)(x-2)$.	9. $(a-11)(a+10)$.	15. $(x^3+7)(x^3-6)$.	21. $(a^2b^2-1)(a^2b^2+7)$.
4. $(m-6)(m-5)$.	10. $(n-19)(n+10)$.	16. $(a^4+8)(a^4-1)$.	22. $(x^3y^3-6)(x^3y^3+8)$.
5. $(x+7)(x-3)$.	11. $(a^2+5)(a^2-9)$.	17. $(a^5-2)(a^5+7)$.	23. $(a^x-3)(a^x+8)$.
6. $(x+2)(x-1)$.	12. $(x^2-1)(x^2-7)$.	18. $(a^6+7)(a^6-9)$.	24. $(a^{x+1}-6)(a^{x+1}-5)$.

EJERCICIO 68

MISCELANEA

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+2)^2$.	14. $(x+y+1)(x-y-1)$.	27. $(2a^3-5b^4)^2$.
2. $(x+2)(x+3)$.	15. $(1-a)(a+1)$.	28. $(a^3+12)(a^3-15)$.
3. $(x+1)(x-1)$.	16. $(m-8)(m+12)$.	29. $(m^2-m+n)(n+m+m^2)$.
4. $(x-1)^2$.	17. $(x^2-1)(x^2+3)$.	30. $(x^4+7)(x^4-11)$.
5. $(n+3)(n+5)$.	18. $(x^3+6)(x^3-8)$.	31. $(11-ab)^2$.
6. $(m-3)(m+3)$.	19. $(5x^3+6m^4)^2$.	32. $(x^2y^3-8)(x^2y^3+6)$.
7. $(a+b-1)(a+b+1)$.	20. $(x^4-2)(x^4+5)$	33. $(a+b)(a-b)(a^2-b^2)$.
8. $(1+b)^3$.	21. $(1-a+b)(b-a-1)$.	34. $(x+1)(x-1)(x^2-2)$.
9. $(a^2+4)(a^2-4)$.	22. $(a^x+b^n)(a^x-b^n)$.	35. $(a+3)(a^2+9)(a-3)$.
10. $(3ab-5x^2)^2$.	23. $(x^{a+1}-8)(x^{a+1}+9)$.	36. $(x+5)(x-5)(x^2+1)$.
11. $(ab+3)(3-ab)$.	24. $(a^2b^2+c^2)(a^2b^2-c^2)$.	37. $(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)$.
12. $(1-4ax)^2$.	25. $(2a+x)^3$.	38. $(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)$.
13. $(a^2+8)(a^2-7)$.	26. $(x^2-11)(x^2-2)$.	

II. COCIENTES NOTABLES

92 Se llama cocientes notables a ciertos cocientes que obedecen a reglas fijas y que pueden ser escritos por simple inspección.

93 COCIENTE DE LA DIFERENCIA DE LOS CUADRADOS DE DOS CANTIDADES ENTRE LA SUMA O LA DIFERENCIA DE LAS CANTIDADES

1) Sea el cociente $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$. Efectuando la división, tenemos:

$$\begin{array}{rr|l} a^2 & -b^2 & a+b \\ \cline{3-3} -a^2-ab & & a-b \\ \cline{1-1} -ab-b^2 & & \\ ab+b^2 & & \end{array}$$

o sea $\dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b.$

2) Sea el cociente $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}$. Efectuando la división, tenemos:

$$\begin{array}{rr|l} a^2 & -b^2 & a-b \\ \cline{3-3} -a^2+ab & & a+b \\ \cline{1-1} ab-b^2 & & \\ -ab+b^2 & & \end{array}$$

o sea $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b.$

Lo anterior nos dice que:

1) **La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de las cantidades es igual a la diferencia de las cantidades.**

2) **La diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la diferencia de las cantidades es igual a la suma de las cantidades.**

Ejemplos

(1) Dividir $9x^2-y^2$ entre $3x+y$.

$$\frac{9x^2-y^2}{3x+y}=3x-y. \quad \text{R.}$$

(2) Dividir $1-x^4$ entre $1-x^2$.

$$\frac{1-x^4}{1-x^2}=1+x^2. \quad \text{R.}$$

(3) Dividir $(a+b)^2-c^2$ entre $(a+b)+c$.

$$\frac{(a+b)^2-c^2}{(a+b)+c}=a+b-c. \quad \text{R.}$$

(4) Dividir $1-(a+n)^2$ entre $1-(a+n)$.

$$\frac{1-(a+n)^2}{1-(a+n)}=1+a+n. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 69

Hallar, por simple inspección, el cociente de:

1. $\dfrac{x^2-1}{x+1}$.
2. $\dfrac{1-x^2}{1-x}$.
3. $\dfrac{x^2-y^2}{x+y}$.
4. $\dfrac{y^2-x^2}{y-x}$.
5. $\dfrac{x^2-4}{x+2}$.
6. $\dfrac{9-x^4}{3-x^2}$.
7. $\dfrac{a^2-4b^2}{a+2b}$.
8. $\dfrac{25-36x^4}{5-6x^2}$.
9. $\dfrac{4x^2-9m^2n^4}{2x+3mn^2}$.
10. $\dfrac{36m^2-49n^2x^4}{6m-7nx^2}$.
11. $\dfrac{81a^6-100b^8}{9a^3+10b^4}$.
12. $\dfrac{a^4b^6-4x^8y^{10}}{a^2b^3+2x^4y^5}$.
13. $\dfrac{x^{2n}-y^{2n}}{x^n+y^n}$.
14. $\dfrac{a^{2x+2}-100}{a^{x+1}-10}$.
15. $\dfrac{1-9x^{2m+4}}{1+3x^{m+2}}$.
16. $\dfrac{(x+y)^2-z^2}{(x+y)-z}$.
17. $\dfrac{1-(a+b}{1+(a+}$
18. $\dfrac{4-(m+}{2+(m+}$
19. $\dfrac{x^2-(x-}{x+(x-}$
20. $\dfrac{(a+x)^2-}{(a+x)+}$

94 COCIENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE LOS CUBOS DE DOS CANTIDADES ENTRE LA SUMA O DIFERENCIA DE LAS CANTIDADES

1) Sea el cociente $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}$. Efectuando la división, tenemos:

$$\begin{array}{rr|l} a^3 & +b^3 & a+b \\ \cline{3-3} -a^3-a^2b & & a^2-ab+b^2 \\ \cline{1-1} -a^2b & & \\ a^2b+ab^2 & & \\ \cline{1-1} ab^2+b^3 & & \\ -ab^2-b^3 & & \end{array}$$

o sea $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2.$

2) Sea el cociente $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}$. Efectuando la división, tenemos:

$$\begin{array}{rr|l} a^3 & -b^3 & a-b \\ \cline{3-3} -a^3+a^2b & & a^2+ab+b^2 \\ \cline{1-1} a^2b & & \\ -a^2b+ab^2 & & \\ \cline{1-1} ab^2-b^3 & & \\ -ab^2+b^3 & & \end{array}$$

o sea $\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2.$

Lo anterior nos dice que:

1) **La suma de los cubos de dos cantidades dividida por la suma de las cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.**

2) **La diferencia de los cubos de dos cantidades dividida por la diferencia de las cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más el producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.**

Ejemplos

(1) Dividir $8x^3+y^3$ entre $2x+y$.

$$\frac{8x^3+y^3}{2x+y}=(2x)^2-2x(y)+y^2=4x^2-2xy+y^2.\quad \text{R.}$$

(2) Dividir $27x^6+125y^9$ entre $3x^2+5y^3$.

$$\frac{27x^6+125y^9}{3x^2+5y^3}=(3x^2)^2-3x^2(5y^3)+(5y^3)^2=9x^4-15x^2y^3+25y^6.$$

(3) Dividir $1-64a^3$ entre $1-4a$.

$$\frac{1-64a^3}{1-4a}=1+4a+16a^2.\quad \text{R.}$$

(4) Dividir $8x^{12}-729y^6$ entre $2x^4-9y^2$.

$$\frac{8x^{12}-729y^6}{2x^4-9y^2}=4x^8+18x^4y^2+81y^4.\quad \text{R.}$$

Los pasos intermedios deben suprimirse y escribir directamente el resultado final.

EJERCICIO 70

Hallar, por simple inspección, el cociente de:

5. $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y}$.
6. $\frac{27m^3-125n^3}{3m-5n}$.
7. $\frac{64a^3+343}{4a+7}$.
8. $\frac{216-125y^3}{6-5y}$.
9. $\frac{1+a^3b^3}{1+ab}$.
10. $\frac{729-512b^3}{9-8b}$.
11. $\frac{a^3x^3+b^3}{ax+b}$.
12. $\frac{n^3-m^3x^3}{n-mx}$.
13. $\frac{x^6-27y^3}{x^2-3y}$.
14. $\frac{8a^9+y^9}{2a^3+y^3}$.
15. $\frac{1-x^{12}}{1-x^4}$.
16. $\frac{27x^6+1}{3x^2+1}$.
17. $\frac{64a^3+b^9}{4a+b^3}$.
18. $\frac{a^6-b^6}{a^2-b^2}$.
19. $\frac{125-343x^{15}}{5-7x^5}$.
20. $\frac{n^6+1}{n^2+1}$.

95 COCIENTE DE LA SUMA O DIFERENCIA DE POTENCIAS IGUALES DE DOS CANTIDADES ENTRE LA SUMA O DIFERENCIA DE LAS CANTIDADES

La división nos da:

$$\text{I.}\ \begin{cases}\dfrac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3\\[2ex]\dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4.\end{cases}\qquad \text{II.}\ \frac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3.$$

$$\text{III.}\ \frac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4.\qquad \text{IV.}\ \begin{cases}\dfrac{a^4+b^4}{a+b}\ \text{no es exacta la división}\\[2ex]\dfrac{a^4+b^4}{a-b}\ \text{no es exacta la división}\end{cases}$$

Lo anterior nos dice que:

1) La **diferencia** de potencias iguales, ya sean pares o impares, es siempre divisible por la **diferencia** de las bases.

2) La **diferencia** de potencias iguales **pares** es siempre divisible por la **suma** de las bases.

3) La **suma** de potencias iguales **impares** es siempre divisible por la **suma** de las bases.

4) La **suma** de potencias iguales **pares** nunca es divisible por la suma **ni por la diferencia** de las bases.

Los resultados anteriores pueden expresarse abreviadamente de este modo:

1) a^n-b^n es siempre divisible por $a-b$, siendo **n cualquier** número entero, ya sea par o impar.

2) a^n-b^n es divisible por $a+b$ siendo n un número entero par.

3) a^n+b^n es divisible por $a+b$ siendo n un número entero impar.

4) a^n+b^n nunca es divisible por $a+b$ ni por $a-b$ siendo n un número entero **par**.

NOTA

La prueba de estas propiedades, fundada en el Teorema del Residuo, en el número 102.

96 LEYES QUE SIGUEN ESTOS COCIENTES

Los resultados de I, II y III del número anterior, que pueden ser comprobados cada uno de ellos en otros casos del mismo tipo, nos permiten establecer inductivamente las siguientes leyes:

1) El cociente tiene tantos términos como unidades tiene el exponente de las letras en el dividendo.

2) El primer término del cociente se obtiene dividiendo el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y el exponente de a disminuye 1 en cada término.

3) El exponente de b en el segundo término del cociente es 1, y este exponente aumenta 1 en cada término posterior a éste.

4) Cuando el divisor es $a-b$ todos los signos del cociente son + y cuando el divisor es $a+b$ los signos del cociente son alternativamente + y −.

Ejemplos

(1) Hallar el cociente de $x^7 - y^7$ entre $x - y$.

Aplicando las leyes anteriores, tenemos:

$$\frac{x^7 - y^7}{x - y} = x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6. \quad \text{R.}$$

Como el divisor es $x - y$, todos los signos del cociente son $+$.

(2) Hallar el cociente de $m^8 - n^8$ entre $m + n$.

$$\frac{m^8 - n^8}{m + n} = m^7 - m^6n + m^5n^2 - m^4n^3 + m^3n^4 - m^2n^5 + mn^6 - n^7. \quad \text{R.}$$

Como el divisor es $m + n$ los signos del cociente alternan.

(3) Hallar el cociente de $x^5 + 32$ entre $x + 2$.

Como $32 = 2^5$, tendremos:

$$\frac{x^5 + 32}{x + 2} = \frac{x^5 + 2^5}{x + 2} = x^4 - 2x^3 + 2^2x^2 - 2^3x + 2^4 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16. \quad \text{R.}$$

(4) Hallar el cociente de $64a^6 - 729b^6$ entre $2a + 3b$.

Como $64a^6 = (2a)^6$ y $729b^6 = (3b)^6$, tendremos:

$$\frac{64a^6 - 729b^6}{2a + 3b} = \frac{(2a)^6 - (3b)^6}{2a + 3b}$$

$$= (2a)^5 - (2a)^4(3b) + (2a)^3(3b)^2 - (2a)^2(3b)^3 + (2a)(3b)^4 - (3b)^5$$

$$= 32a^5 - 48a^4b + 72a^3b^2 - 108a^2b^3 + 162ab^4 - 243b^5. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 71

Hallar, por simple inspección, el cociente de:

1. $\frac{[\ldots]-y^4}{[\ldots]-y}$.
2. $\frac{[\ldots]+n^5}{[\ldots]+n}$.
3. $\frac{[\ldots]-n^5}{[\ldots]-n}$.
4. $\frac{[\ldots]-y^6}{[\ldots]+y}$.
5. $\frac{[\ldots]-b^6}{[\ldots]-b}$.
6. $\frac{[\ldots]+y^7}{[\ldots]+y}$.
7. $\frac{a^7-m^7}{a-m}$.
8. $\frac{a^8-b^8}{a+b}$.
9. $\frac{x^{10}-y^{10}}{x-y}$.
10. $\frac{m^9+n^9}{m+n}$.
11. $\frac{m^9-n^9}{m-n}$.
12. $\frac{a^{10}-x^{10}}{a+x}$.
13. $\frac{1-n^5}{1-n}$.
14. $\frac{1-a^6}{1-a}$.
15. $\frac{1+a^7}{1+a}$.
16. $\frac{1-m^8}{1+m}$.
17. $\frac{x^4-16}{x-2}$.
18. $\frac{x^6-64}{x+2}$.
19. $\frac{x^7-128}{x-2}$.
20. $\frac{a^5+243}{a+3}$.
21. $\frac{x^6-729}{x-3}$.
22. $\frac{625-x^4}{x+5}$.
23. $\frac{m^8-256}{m-2}$.
24. $\frac{x^{10}-1}{x-1}$.
25. $\frac{x^5+243y^5}{x+3y}$.
26. $\frac{16a^4-81b^4}{2a-3b}$.
27. $\frac{64m^6-729n^6}{2m+3n}$.
28. $\frac{1024x^{10}-1}{2x-1}$.
29. $\frac{512a^9+b^9}{2a+b}$.
30. $\frac{a^6-729}{a-3}$.

(5) Hallar el cociente de $a^{10} + b^{10}$ entre $a^2 + b^2$.

En los casos estudiados hasta ahora los exponentes del divisor han sido siempre 1. Cuando los exponentes del divisor sean 2, 3, 4, 5, etc., sucederá que el exponente de a disminuirá en cada término 2, 3, 4, 5, etc.; la b aparece en el segundo término del cociente elevada a un exponente igual al que tiene en el divisor, y este exponente en cada término posterior, aumentará 2, 3, 4, 5, etc.

Así, en este caso, tendremos: $$\frac{a^{10} + b^{10}}{a^2 + b^2} = a^8 - a^6b^2 + a^4b^4 - a^2b^6 + b^8. \quad \text{R.}$$

donde vemos que el exponente de a disminuye 2 en cada término y el de b aumenta 2 en cada término.

(6) Hallar el cociente de $x^{15} - y^{15}$ entre $x^3 - y^3$.

$$\frac{x^{15} - y^{15}}{x^3 - y^3} = x^{12} + x^9y^3 + x^6y^6 + x^3y^9 + y^{12}. \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 72

Escribir, por simple inspección, el cociente de:

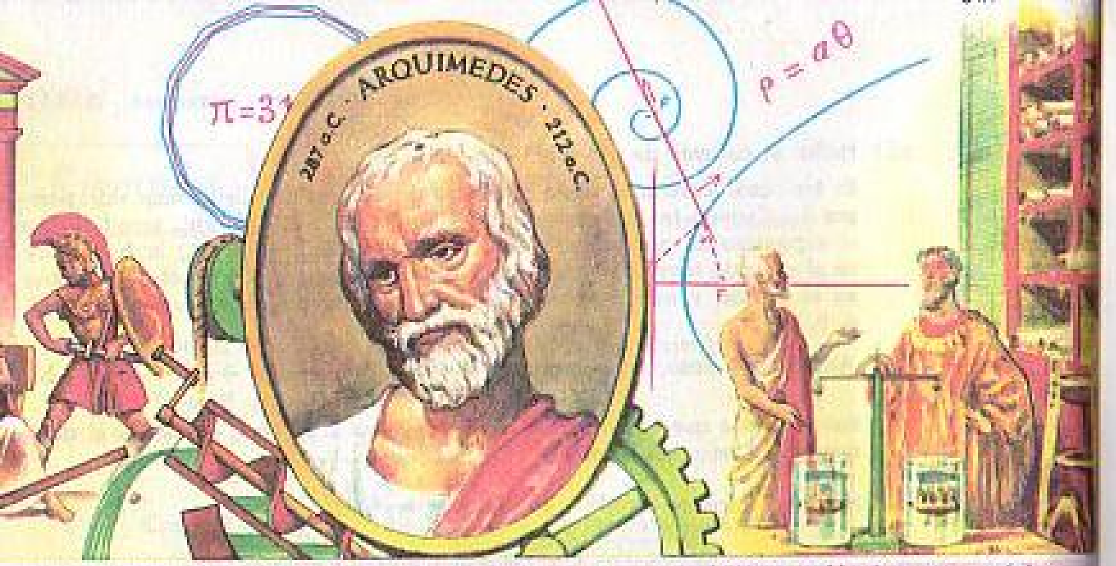
1. $\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$.
2. $\frac{a^6-b^6}{a^2+b^2}$.
3. $\frac{m^{10}-n^{10}}{m^2-n^2}$.
4. $\frac{a^{12}-b^{12}}{a^3+b^3}$.
5. $\frac{a^{12}-x^{12}}{a^3-x^3}$.
6. $\frac{x^{15}+y^{15}}{x^3+y^3}$.
7. $\frac{m^{12}+1}{m^4+1}$.
8. $\frac{m^{16}-n^{16}}{m^4-n^4}$.
9. $\frac{a^{18}-b^{18}}{a^3+b^3}$.
10. $\frac{x^{20}-y^{20}}{x^5+y^5}$.
11. $\frac{m^{21}+n^{21}}{m^3+n^3}$.
12. $\frac{x^{24}-1}{x^6-1}$.
13. $\frac{a^{25}+b^{25}}{a^5+b^5}$.
14. $\frac{a^{30}-m^{30}}{a^6-m^6}$.

EJERCICIO 73

MISCELANEA

Escribir el cociente sin efectuar la división:

1. $\frac{x^4-1}{1+x^2}$.
2. $\frac{8m^3+n^6}{2m+n^2}$.
3. $\frac{1-a^5}{1-a}$.
4. $\frac{x^6-27y^3}{x^2-3y}$.
5. $\frac{x^6-49y^6}{x^3+7y^3}$.
6. $\frac{a^{14}-b^{14}}{a^2-b^2}$.
7. $\frac{1+a^3}{1+a}$.
8. $\frac{16x^2y^4-25m^6}{4xy^2+5m^3}$.
9. $\frac{x^{27}+y^{27}}{x^3+y^3}$.
10. $\frac{a^{27}+y^{27}}{a^9+y^9}$.
11. $\frac{a^4b^4-64x^6}{a^2b^2+8x^3}$.
12. $\frac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$.
13. $\frac{32x^5+243y^5}{2x+3y}$.
14. $\frac{25-(a+1)^2}{5+(a+1)}$.
15. $\frac{1-x^{12}}{1-x^4}$.
16. $\frac{64x^6-343y^9}{4x^2-7y^3}$.
17. $\frac{a^{18}-b^{18}}{a^3+b^3}$.
18. $\frac{(a+x)^2-y^2}{(a+x)-y}$.
19. $\frac{1+x^{11}}{x+1}$.
20. $\frac{x^{40}-y^{40}}{x^8-y^8}$.
21. $\frac{9-36x^{10}}{3+6x^5}$.
22. $\frac{x^8-256}{x-2}$.



MEDES (287-212 A. C.) El más genial de los íticos de la Antigüedad. Fue el primero en metódicamente las ciencias a los problemas de real. Por espacio de tres años defendió a Si- su ciudad natal, contra el ataque de los romanos. Fue autor de innumerables inventos mecánicos, entre los que están el tornillo sinfín, la rueda dentada, etc. Fue asesinado por un soldado enemigo mientras resolvía un problema matemático. Fundó la Hidrostática al descubrir el principio que lleva su nombre.

CAPITULO VII

TEOREMA DEL RESIDUO

97 POLINOMIO ENTERO Y RACIONAL

Un polinomio como x^3+5x^2-3x+4 es entero porque ninguno de sus términos tiene letras en el denominador y es racional porque ninguno de sus términos tiene raíz inexacta. Este es un polinomio entero y racional en x y su grado es 3.

El polinomio $a^5+6a^4-3a^3+5a^2+8a+3$ es un polinomio entero y racional en a y su grado es 5.

98 RESIDUO DE LA DIVISION DE UN POLINOMIO ENTERO Y RACIONAL EN x POR UN BINOMIO DE LA FORMA $x-a$

1) Vamos a hallar el residuo de la división de $x^3-7x^2+17x-6$ entre $x-3$.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -7x^2 & +17x & -6 & x-3 \\ \cline{5-5} -x^3 & +3x^2 & & & x^2-4x+5 \\ \cline{1-2} & -4x^2 & +17x & & \\ & 4x^2 & -12x & & \\ \cline{2-3} & & 5x & -6 & \\ & & -5x & +15 & \\ \cline{3-4} & & & 9 & \end{array}$$

La división no es exacta y el residuo es 9.

Si ahora, en el dividendo $x^3-7x^2+17x-6$ sustituimos la x por 3, tendremos:

$$3^3-7(3)^2+17(3)-6=27-63+51-6=9$$

y vemos que el **residuo** de dividir el polinomio dado entre $x-3$ se obtiene **sustituyendo en el polinomio dado la x por $+3$.**

2) Vamos a hallar el residuo de la división de $3x^3-2x^2-18x-1$ entre $x+2$.

Efectuemos la división:

$$\begin{array}{rrrr|l} 3x^3 & -2x^2 & -18x & -1 & x+2 \\ \cline{5-5} -3x^3 & -6x^2 & & & 3x^2-8x-2 \\ \cline{1-2} & -8x^2 & -18x & & \\ & 8x^2 & +16x & & \\ \cline{2-3} & & -2x & -1 & \\ & & 2x & +4 & \\ \cline{3-4} & & & 3 & \end{array}$$

Si ahora, en el dividendo $3x^3-2x^2-18x-1$ sustituimos la x por -2, tendremos:

$$3(-2)^3-2(-2)^2-18(-2)-1=-24-8+36-1=3$$

y vemos que el **residuo** de dividir el polinomio dado entre $x+2$ se obtiene **sustituyendo en el polinomio dado la x por -2.**

Lo expuesto anteriormente se prueba en el

99 TEOREMA DEL RESIDUO

El residuo de dividir un polinomio entero y racional en x por un binomio de la forma $x-a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a.

Sea el polinomio $Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots\ldots+Mx+N$.

Dividamos este polinomio por $x-a$ y continuemos la operación hasta que el residuo R sea independiente de x. Sea Q el cociente de esta división.

Como en toda división inexacta el dividendo es igual al producto del divisor por el cociente más el residuo, tendremos:

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\ldots\ldots+Mx+N=(x-a)Q+R.$$

Esta igualdad es cierta para todos los valores de x. Sustituyamos la x por a y tendremos:

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots\ldots+Ma+N=(a-a)Q+R.$$

Pero $(a-a)=0$ y $(a-a)Q=0\times Q=0$; luego, la igualdad anterior se convierte en

$$Aa^m+Ba^{m-1}+Ca^{m-2}+\ldots\ldots+Ma+N=R,$$

igualdad que prueba el teorema, pues nos dice que R, el residuo de la división, es igual a lo que se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a, que era lo que queríamos demostrar.

NOTA

Un polinomio ordenado en x suele expresarse abreviadamente por la notación $P(x)$ y el resultado de sustituir en este polinomio la x por a se escribe $P(a)$.

Si el divisor es $x+a$, como $x+a=x-(-a)$, el residuo de la división del polinomio ordenado en x entre $x+a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por $-a$.

En los casos anteriores el coeficiente de x en $x-a$ y $x+a$ es 1. Estos binomios pueden escribirse $1x-a$ y $1x+a$.

Sabemos que el residuo de dividir un polinomio ordenado en x entre $x-a$ ó $1x-a$ se obtiene sustituyendo la x por a, o sea, por $\frac{a}{1}$ y el residuo de dividirlo entre $x+a$ ó $1x+a$ se obtiene sustituyendo la x por $-a$, o sea por $-\frac{a}{1}$.

Por tanto, cuando el divisor sea la forma $bx-a$, donde b, que es el coeficiente de x, es distinto de 1, el residuo de la división se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por $\frac{a}{b}$ y cuando el divisor sea de la forma $bx+a$ el residuo se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por $-\frac{a}{b}$.

En general, el residuo de dividir un polinomio ordenado en x por un binomio de la forma $bx-a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por el quebrado que resulta de dividir el segundo término del binomio con el signo cambiado entre el coeficiente del primer término del binomio.

Ejemplos

(1) Hallar, sin efectuar la división, el residuo de dividir x^2-7x+6 entre $x-4$.

Sustituyendo la x por 4, tendremos:

$$4^2-7(4)+6=16-28+6=-6.\quad \text{R.}$$

(2) Hallar, por inspección, el residuo de dividir a^3+5a^2+a-1 entre $a+5$.

Sustituyendo la a por -5, tendremos:

$$(-5)^3+5(-5)^2+(-5)-1=-125+125-5-1=-6.\quad \text{R.}$$

(3) Hallar, por inspección, el residuo de $2x^3+6x^2-12x+1$ entre $2x+1$.

Sustituyendo la x por $-\frac{1}{2}$, tendremos:

$$2\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3+6\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2-12\left(-\tfrac{1}{2}\right)+1=-\tfrac{1}{4}+\tfrac{3}{2}+6+1=\tfrac{33}{4}.\quad \text{R.}$$

(4) Hallar, por inspección, el residuo de a^4-9a^2-3a+2 entre $3a-2$.

Sustituyendo la a por $\frac{2}{3}$, tendremos:

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^4-9\left(\tfrac{2}{3}\right)^2-3\left(\tfrac{2}{3}\right)+2=\tfrac{16}{81}-4-2+2=-\tfrac{308}{81}.\quad \text{R.}$$

EJERCICIO 74

Hallar, sin efectuar la división, el residuo de dividir:

1. x^2-2x+3 entre $x-1$.
2. x^3-3x^2+2x-2 entre $x+1$.
3. x^4-x^3+5 entre $x-2$.
4. $a^4-5a^3+2a^2-6$ entre $a+3$.
5. $m^4+m^3-m^2+5$ entre $m-4$.
6. $x^5+3x^4-2x^3+4x^2-2x+2$ entre $x+3$.
7. a^5-2a^3+2a-4 entre $a-5$.
8. $6x^3+x^2+3x+5$ entre $2x+1$.
9. $12x^3-21x+90$ entre $3x-3$.
10. $15x^3-11x^2+10x+18$ entre $3x+2$.
11. $5x^4-12x^3+9x^2-22x+21$ entre $5x-$
12. $a^6+a^4-8a^2+4a+1$ entre $2a+3$.

DIVISION SINTETICA.

(100) REGLA PRACTICA PARA HALLAR EL COCIENTE Y EL RESIDUO DE LA DIVISION DE UN POLINOMIO ENTERO EN x POR x − a.

1) Dividamos $x^3-5x^2+3x+14$ entre $x-3$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3-5x^2+3x+14 & x-3 \\ \hline
-x^3+3x^2 & x^2-2x-3 \\
\quad -2x^2+3x & \\
\quad\ \ 2x^2-6x & \\
\qquad -3x+14 & \\
\qquad\ \ 3x-\ 9 & \\
\qquad\qquad\ \ 5 &
\end{array}$$

Aquí vemos que el cociente x^2-2x-3 es un polinomio en x cuyo grado es 1 menos que el grado del dividendo; que el coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo y que el residuo es 5.

Sin efectuar la división, el cociente y el residuo pueden hallarse por la siguiente regla práctica llamada división sintética:

1) El cociente es un polinomio en x cuyo grado es 1 menos que el grado del dividendo.

2) El coeficiente del primer término del cociente es igual al coeficiente del primer término del dividendo.

3) El coeficiente de un término cualquiera del cociente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el segundo término del binomio divisor cambiado de signo y sumando este producto con el coeficiente del término que ocupa el mismo lugar en el dividendo.

4) El residuo se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente por el segundo término del divisor cambiado de signo y sumando este producto con el término independiente del dividendo:

Apliquemos esta regla a la división anterior. Para ello escribimos solamente los coeficientes del dividendo y se procede de este modo:

Dividendo	x^3	$-5x^2$	$+3x$	$+14$	Divisor x
Coeficientes. . .	1	-5	$+3$	$+14$	$+3$ → (Segundo término del divisor con el signo cambiado).
	$1\times 3=$	3 $(-2)\times 3=$	-6 $(-3)\times 3=$	-9	
	1	-2	-3	$+5$	

El cociente será un polinomio en x de 2º **grado**, porque el dividendo es de 3er. grado.

El coeficiente del **primer** término del cociente es 1, igual que en el dividendo.

El coeficiente del **segundo** término del cociente es -2, que se ha obtenido multiplicando el segundo término del divisor con el signo cambiado $+3$, por el coeficiente del **primer** término del cociente y sumando este producto, $1 \times 3 = 3$, con el coeficiente del término que ocupa en el dividendo el mismo lugar que el que estamos hallando del cociente, el **segundo** del dividendo -5 y tenemos $-5+3=-2$.

El coeficiente del **tercer** término del cociente es -3, que se ha obtenido multiplicando el segundo término del divisor con el signo cambiado $+3$, por el coeficiente del **segundo** término del cociente -2 y sumando este producto: $(-2) \times 3 = -6$, con el coeficiente del término que ocupa en el dividendo el mismo lugar que el que estamos hallando del cociente, el **tercero** del dividendo $+3$ y tenemos $+3-6=-3$.

El **residuo** es 5, que se obtiene multiplicando el coeficiente del último término del cociente -3, por el segundo término del divisor cambiado de signo $+3$ y sumando este producto: $(-3) \times 3 = -9$, con el término independiente del dividendo $+14$ y tenemos $+14-9=+5$.

Por lo tanto, el **cociente** de la división es **x^2-2x-3 y el residuo 5,** que son el cociente y el residuo que se obtuvieron efectuando la división.

Con este método, en realidad, lo que se hace es **sustituir** en el polinomio dado la x por $+3$.

2) Hallar, por división sintética, el cociente y el resto de las divisiones $2x^4-5x^3+6x^2-4x-105$ entre $x+2$.

...tes
...ndo

(2o. término del divisor con el signo cambiado)

-5	$+6$	-4	-105	-2
$)=-4$	$(-9)\times(-2)=\ 18$	$24\times(-2)=-48$	$(-52)\times(-2)=104$	
-9	$+24$	-52	-1 (residuo)	

Como el dividendo es de 4º grado, el cociente es de 3er. grado.

Los coeficientes del cociente son 2, -9, $+24$ y -52; luego, el cociente es **$2x^3-9x^2+24x-52$ y el residuo es -1.**

Con este método, hemos sustituido en el polinomio dado la x por -2.

3) Hallar, por división sintética, el cociente y el residuo de dividir $x^5-16x^3-202x+81$ entre $x-$

Como este polinomio es incompleto, pues le faltan los términos en x^4 y en x^2, al escribir los coeficientes ponemos 0 en los lugares que debían ocupar los coeficientes de estos términos.

Tendremos:

1	$+0$	-16	$+0$	-202	$+81$	$+4$
	4	16	0	0	-808	
1	$+4$	0	0	-202	-727 (residuo)	

Como el dividendo es de 5º grado, el cociente es de 4º grado.

Los coeficientes del cociente son 1, $+4$, 0, 0 y -202; luego, el cociente es **x^4+4x^3-202 y el residuo es -727.**

4) Hallar por división sintética el cociente y el resto de la división de $2x^4-3x^3-7x-6$ entre $2x+$

Pongamos el divisor en la forma $x+a$ dividiendo sus dos términos por 2 y tendremos $\frac{2x}{2}+\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2}$. Ahora bien, como el divisor lo hemos dividido entre 2, el cociente quedará multiplicado por 2; luego, los coeficientes que encontremos para el cociente tendremos que **dividirlos** entre 2 para destruir esta operación:

2	-3	$+0$	-7	-6	$-\frac{1}{2}$
	-1	$+2$	-1	4	
2	-4	$+2$	-8	-2 (residuo)	

2, -4, $+2$ y -8 son los coeficientes del cociente **multiplicados** por 2; luego, para destruir esta operación hay que dividirlos entre 2 y tendremos 1, -2, $+1$ y -4. Como el cociente es de tercer grado, el cociente será: x^3-2x^2+x-

y el residuo es -2 porque al residuo no le afecta la división del divisor entre 2.

EJERCICIO 75

Hallar, por división sintética, el cociente y el resto de las divisiones siguientes:

1. x^2-7x+5 entre $x-3$.
2. a^2-5a+1 entre $a+2$.
3. x^4-x^3+2x-2 entre $x+1$.
4. x^3-2x^2+x-2 entre $x-2$.
5. a^3-3a^2-6 entre $a+3$.
6. $n^4-5n^3+4n-48$ entre $n+2$.

$^4-3x+5$ entre $x-1$.
$^5+x^4-12x^3-x^2-4x-2$ entre $x+4$.
$^3-3a^3+4a-6$ entre $a-2$.
$^5-208x^2+2076$ entre $x-5$.

11. $x^6-3x^5+4x^4-3x^3-x^2+2$ entre $x+3$.
12. $2x^3-3x^2+7x-5$ entre $2x-1$.
13. $3a^3-4a^2+5a+6$ entre $3a+2$.
14. $3x^4-4x^3+4x^2-10x+8$ entre $3x-1$.

15. $x^5-x^4+\frac{10}{3}x^3+x^2-1$ entre $2x+3$.

COROLARIOS DEL TEOREMA DEL RESIDUO

101 DIVISIBILIDAD POR $x-a$

Un polinomio entero en x que se anula para $x=a$, o sea sustituyendo en él la x por a, es divisible por $x-a$.

Sea el polinomio entero $P(x)$, que suponemos se anula para $x=a$, es decir, sustituyendo la x por a. Decimos que $P(x)$ es divisible por $x-a$.

En efecto: Según lo demostrado en el Teorema del Residuo, el residuo de dividir un polinomio entero en x por $x-a$ se obtiene sustituyendo en el polinomio dado la x por a; pero por hipótesis $P(x)$ se anula al sustituir la x por a, o sea $P(a)=0$; luego, el residuo de la división de $P(x)$ entre $x-a$ es cero; luego, $P(x)$ es divisible por $x-a$.

Del propio modo, si $P(x)$ se anula para $x=-a$, $P(x)$ es divisible por $x-(-a)=x+a$; si $P(x)$ se anula para $x=\frac{a}{b}$ será divisible por $x-\frac{a}{b}$ o por $bx-a$; si $P(x)$ se anula para $x=-\frac{a}{b}$ será divisible por $x-\left(-\frac{a}{b}\right)=x+\frac{a}{b}$ o por $bx+a$.

Recíprocamente, si $P(x)$ es divisible por $x-a$ tiene que anularse para $x=a$, es decir, sustituyendo la x por a; si $P(x)$ es divisible por $x+a$ tiene que anularse para $x=-a$; si $P(x)$ es divisible por $bx-a$ tiene que anularse para $x=\frac{a}{b}$ y si es divisible por $bx+a$ tiene que anularse para $x=-\frac{a}{b}$.

Ejemplos

(1) Hallar, sin efectuar la división, si x^3-4x^2+7x-6 es divisible por $x-2$.

Este polinomio será divisible por $x-2$ si se anula para $x=+2$.

Sustituyendo la x por 2, tendremos:

$$2^3-4(2)^2+7(2)-6=8-16+14-6=0$$

luego es divisible por $x-2$.

(2) Hallar, por inspección, si x^3-2x^2+3 es divisible por $x+1$.

Este polinomio será divisible por $x+1$ si se anula para $x=-1$.

Sustituyendo la x por -1, tendremos:

$$(-1)^3-2(-1)^2+3=-1-2+3=0$$

luego es divisible por $x+1$.

(3) Hallar, por inspección, si $x^4+2x^3-2x^2+x-6$ es divisible por $x+3$ y encontrar el cociente de la división.

Aplicaremos la división sintética del número 100 con la cual hallamos simultáneamente el cociente y el residuo, si lo hay.

Tendremos:	1	$+2$	-2	$+1$	-6	-3
		-3	$+3$	-3	$+6$	
	1	-1	$+1$	-2	0 (residuo)	

Lo anterior nos dice que el polinomio se anula al sustituir la x por -3; luego es divisible por $x+3$.

El cociente es de tercer grado y sus coeficientes son $1, -1, +1$ y -2, luego el cociente es

$$x^3-x^2+x-2.$$

Por tanto, si el dividendo es $x^4+2x^3-2x^2+x-6$, el divisor $x+3$ y el cociente x^3-x^2+x-2, y la división es exacta, podemos escribir:

$$x^4+2x^3-2x^2+x-6=(x+3)(x^3-x^2+x-2).$$

CONDICION NECESARIA PARA LA DIVISIBILIDAD DE UN POLINOMIO EN x POR UN BINOMIO DE LA FORMA $x-a$.

Es condición necesaria para que un polinomio en x sea divisible por un binomio de la forma $x-a$, que el término independiente del polinomio sea múltiplo del término a del binomio, sin tener en cuenta los signos. Así, el polinomio $3x^4+2x^3-6x^2+8x+7$ no es divisible por el binomio $x-3$, porque el término independiente del polinomio 7, no es divisible por el término numérico del binomio, que es 3.

Esta condición **no es suficiente**, es decir, que aun cuando el término independiente del polinomio sea divisible por el término a del binomio, no podemos afirmar que el polinomio en x sea divisible por el binomio $x-a$.

EJERCICIO 76

Hallar, sin efectuar la división, si son exactas las divisiones siguientes:

1. x^2-x-6 entre $x-3$.
2. x^3+4x^2-x-10 entre $x+2$.
3. $2x^4-5x^3+7x^2-9x+3$ entre $x-1$.
4. $x^5+x^4-5x^3-7x+8$ entre $x+3$.
5. $4x^3-8x^2+11x-4$ entre $2x-1$.
6. $6x^5+2x^4-3x^3-x^2+3x+3$ entre $3x+1$

Sin efectuar la división, probar que:

7. $a+1$ es factor de a^3-2a^2+2a+5.
8. $x-5$ divide a $x^5-6x^4+6x^3-5x^2+2x-10$.
9. $4x-3$ divide a $4x^4-7x^3+7x^2-7x+3$.
10. $3n+2$ no es factor de $3n^5+2n^4-3n^3-2n^2+6n+7$.

Sin efectuar la división, hallar si las divisiones siguientes son o no exactas y determinar el cociente en cada caso y el residuo, si lo hay:

11. $2a^3-2a^2-4a+16$ entre $a+2$.
12. a^4-a^2+2a+2 entre $a+1$.
13. x^4+5x-6 entre $x-1$.
14. $x^6-39x^4+26x^3-52x^2+29x-30$ entre $x-6$.
15. $a^6-4a^5-a^4+4a^3+a^2-8a+25$ entre $a-4$.
16. $16x^4-24x^3+37x^2-24x+4$ entre $4x-1$.
17. $15n^5+25n^4-18n^3-18n^2+17n-11$ entre $3n+5$.

En los ejemplos siguientes, hallar el valor de la constante K (término independiente del polinomio) para que:

18. $7x^2-5x+K$ sea divisible por $x-5$.
19. x^3-3x^2+4x+K sea divisible por $x-2$.
20. $2a^4+25a+K$ sea divisible por $a+3$.
21. $20x^3-7x^2+29x+K$ sea divisible por $4x+1$

102 DIVISIBILIDAD DE a^n+b^n Y a^n-b^n POR $a+b$ Y $a-b$

Vamos a aplicar el Teorema del Residuo a la demostración de las reglas establecidas en el número 95.

Siendo n un número entero y positivo, se verifica:

1) a^n-b^n es siempre divisible por $a-b$, ya sea n par o impar.

En efecto: De acuerdo con el Teorema del Residuo, a^n-b^n será divisible por $a-b$, si se anula sustituyendo a por $+b$.

Sustituyendo a por $+b$ en a^n-b^n, tenemos: $a^n-b^n=b^n-b^n=0$.

Se anula; luego, a^n-b^n es siempre divisible por $a-b$.

2) a^n+b^n es divisible por $a+b$ si n es impar.

Siendo n impar, a^n+b^n será divisible por $a+b$ si se anula al sustituir a por $-b$.

Sustituyendo a por $-b$ en a^n+b^n, tenemos: $a^n+b^n=(-b)^n+b^n=-b^n+b^n=0$.

Se anula; luego, a^n+b^n es divisible por $a+b$ siendo n impar. $(-b)^n=-b^n$ porque n es impar y toda cantidad negativa elevada a un exponente impar da una cantidad negativa.

3) a^n-b^n es divisible por $a+b$ si n es par.

Siendo n par, a^n-b^n será divisible por $a+b$ si se anula al sustituir la a por $-b$.

Sustituyendo la a por $-b$ en a^n-b^n, tenemos: $a^n-b^n=(-b)^n-b^n=b^n-b^n=$

Se anula; luego, a^n-b^n es divisible por $a+b$ siendo n par. $(-b)^n=b^n$ porque n es par y toda cantidad negativa elevada a un exponente par da una cantidad positiva.

4) a^n+b^n no es divisible por $a+b$ si n es par.

Siendo n par, para que a^n+b^n sea divisible por $a+b$ es necesario que se anule al sustituir la a por $-b$.

Sustituyendo la a por $-b$, tenemos: $a^n+b^n=(-b)^n+b^n=b^n+b^n=2b^n$

No se anula; luego, a^n+b^n no es divisible por $a+b$ cuando n es par.

5) a^n+b^n nunca es divisible por $a-b$, ya sea n par o impar.

Siendo n par o impar, para que a^n+b^n sea divisible por $a-b$ es necesario que se anule al sustituir la a por $+b$.

Sustituyendo, tenemos: $a^n+b^n=b^n+b^n=2b^n$.

No se anula; luego, a^n+b^n nunca es divisible por $a-b$

EJERCICIO 77

Diga, por simple inspección, si son exactas las divisiones siguientes y en caso negativo, diga cuál es el residuo:

1. $\frac{x^5+1}{x-1}$.
2. $\frac{a^4+b^4}{a+b}$.
3. $\frac{x^8-1}{x^2+1}$.
4. $\frac{a^{11}+1}{a-1}$.
5. $\frac{a^6+b^6}{a^2+b^2}$.
6. $\frac{x^7-1}{x-1}$.
7. $\frac{x^3-8}{x+2}$.
8. $\frac{x^4-16}{x+2}$.
9. $\frac{a^5+32}{a-2}$.
10. $\frac{x^7-128}{x+2}$.
11. $\frac{16a^4-81b^4}{2a+3b}$
12. $\frac{a^6x^6+b^6}{ax^2+b^3}$.

DIVISIBILIDAD DE $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$

1) $\frac{a^n-b^n}{a-b}$ siempre es divisible.

2) $\frac{a^n+b^n}{a+b}$ es divisible si n es impar.

3) $\frac{a^n-b^n}{a+b}$ es divisible si n es par

4) $\frac{a^n+b^n}{a-b}$ nunca es divisible.

O PTOLOMEO (100-175 D. C.) El más so- te de los astrónomos de la época helenística. en Egipto, confluencia de dos culturas, Orien- cidente, influyó igualmente sobre ambas. Su geocéntrico dominó la Astronomía durante catorce siglos hasta la aparición de Copérnico. Aunque es más conocido por estos trabajos, fue uno de los fundadores de la Trigonometría. Su obra principal, el Almagesto, en que se abordan cuestiones científicas, se utilizó en las universidades hasta el siglo XVIII.

CAPITULO VIII

ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

(103) **IGUALDAD** es la expresión de que dos cantidades o expresiones algebraicas tienen el mismo valor.

Ejemplos $a = b + c$. $3x^2 = 4x + 15$.

(104) **ECUACION** es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas **incógnitas** y que sólo se verifica o es verdadera para **determinados valores** de las incógnitas.

Las **incógnitas** se representan por las últimas letras del alfabeto: x, y, z, u, v.

Así, $5x + 2 = 17$

es una **ecuación**, porque es una igualdad en la que hay una incógnita, la x, y esta igualdad sólo se verifica, o sea que sólo es verdadera, para el valor $x = 3$. En efecto, si sustituimos la x por 3, tenemos: $5(3) + 2 = 17$, o sea: $17 = 17$.

Si damos a x un valor distinto de 3, la igualdad no se verifica o no es verdadera.

La igualdad $y^2 - 5y = -6$ es una ecuación porque es una igualdad que sólo se verifica para $y = 2$ e $y = 3$. En efecto, sustituyendo la y por 2, tenemos:

$$2^2 - 5(2) = -$$
$$4 - 10 = -$$
$$-6 = -$$

Si hacemos $y = 3$, tenemos:

$$3^2 - 5(3) = -6$$
$$9 - 15 = -6$$
$$-6 = -6$$

Si damos a y un valor distinto de 2 ó 3, la igualdad no se verifica.

(105) **IDENTIDAD** es una igualdad que se verifica para **cualesquiera** valores de las letras que entran en ella.

Así,
$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$
$$a^2 - m^2 = (a + m)(a - m)$$

son **identidades** porque se verifican para **cualesquiera** valores de las letras a y b en el primer ejemplo y de las letras a y m del segundo ejemplo.

El **signo de identidad** es $\equiv$, que se lee "**idéntico a**".

Así, la identidad de $(x + y)^2$ con $x^2 + 2xy + y^2$ se escribe $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$

y se lee $(x + y)^2$ **idéntico** a $x^2 + 2xy + y^2$

(106) **MIEMBROS**

Se llama **primer miembro** de una ecuación o de una identidad a la expresión que está a la **izquierda** del signo de **igualdad** o **identidad**, y **segundo miembro**, a la expresión que está a la derecha.

Así, en la ecuación $3x - 5 = 2x - 3$

el primer miembro es $3x - 5$ y el segundo miembro $2x - 3$.

(107) **TERMINOS** son cada una de las cantidades que están conectadas con otra por el signo $+$ o $-$, o la cantidad que está sola en un miembro.

Así, en la ecuación $3x - 5 = 2x - 3$

los términos son $3x$, -5, $2x$ y -3.

No deben confundirse los **miembros** de una ecuación con los **términos** de la misma, error muy frecuente en los alumnos.

Miembro y término son equivalentes sólo cuando en un miembro de una ecuación hay una sola cantidad.

Así, en la ecuación $3x = 2x + 3$

tenemos que $3x$ es el **primer miembro** de la ecuación y también es un **término** de la ecuación.

108 **CLASES DE ECUACIONES**

Una **ecuación numérica** es una ecuación que no tiene más letras que las incógnitas, como $4x-5=x+4$, donde la única letra es la incógnita x.

Una **ecuación literal** es una ecuación que además de las incógnitas tiene otras letras, que representan cantidades conocidas, como $3x+2a=5b-bx$.

Una ecuación es **entera** cuando ninguno de sus términos tiene denominador como en los ejemplos anteriores, y es **fraccionaria** cuando algunos o todos sus términos tienen denominador, como

$$\frac{3x}{2}+\frac{6x}{5}=5+\frac{x}{5}.$$

109 **GRADO** de una ecuación con una sola incógnita es el mayor exponente que tiene la incógnita en la ecuación. Así, $4x-6=3x-1$ y $ax+b=b^2x+c$, son ecuaciones de **primer grado** porque el mayor exponente de x es 1.

La ecuación $x^2-5x+6=0$ es una ecuación de **segundo grado** porque el mayor exponente de x es 2.

Las ecuaciones de **primer grado** se llaman **ecuaciones simples** o **lineales.**

110 **RAICES O SOLUCIONES** de una ecuación son los valores de las incógnitas que verifican o satisfacen la ecuación, es decir, que sustituidos en lugar de las incógnitas, convierten la ecuación en **identidad.**

Así, en la ecuación $5x-6=3x+8$ la raíz es 7 porque haciendo $x=7$ se tiene

$$5(7)-6=3(7)+8, \text{ o sea } 29=29,$$

donde vemos que 7 satisface la ecuación.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita tienen una sola raíz.

111 **RESOLVER UNA ECUACION** es hallar sus raíces, o sea el valor o los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación.

112 **AXIOMA FUNDAMENTAL DE LAS ECUACIONES**

Si con cantidades iguales se verifican operaciones iguales los resultados serán iguales.

REGLAS QUE SE DERIVAN DE ESTE AXIOMA

1) **Si a los dos miembros de una ecuación se suma una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**

2) **Si a los dos miembros de una ecuación se resta una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**

3) **Si los dos miembros de una ecuación se multiplican por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**

4) **Si los dos miembros de una ecuación se dividen por una misma cantidad, positiva o negativa, la igualdad subsiste.**

5) **Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia o si a los dos miembros se extrae una misma raíz, la igualdad subsiste.**

113 **LA TRANSPOSICION DE TERMINOS** consiste en cambiar los términos de una ecuación de un miembro al otro.

REGLA

Cualquier término de una ecuación se puede pasar de un miembro a otro cambiándole el signo.

En efecto:

1) Sea la ecuación $5x=2a-b$.

Sumando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (Regla 1), y tendremos:

$$5x+b=2a-b+b$$

y como $-b+b=0$, queda

$$5x+b=2a$$

donde vemos que $-b$, que estaba en el segundo miembro de la ecuación dada, ha pasado al primer miembro con signo $+$.

2) Sea la ecuación $3x+b=2a$.

Restando b a los dos miembros de esta ecuación, la igualdad subsiste (Regla 2), y tendremos:

$$3x+b-b=2a-b$$

y como $b-b=0$, queda

$$3x=2a-b$$

donde vemos que $+b$, que estaba en el primer miembro de la ecuación dada, ha pasado al segundo miembro con signo $-$.

(114) Términos iguales con signos iguales en distinto miembro de una ecuación, pueden suprimirse.

Así, en la ecuación $x + b = 2a + b$

tenemos el término b con signo + en los dos miembros. Este término puede suprimirse, quedando

$$x = 2a$$

porque equivale a restar b a los dos miembros.

En la ecuación $5x - x^2 = 4x - x^2 + 5$

tenemos el término x^2 con signo $-x^2$ en los dos miembros.

Podemos suprimirlo, y queda

$$5x = 4x + 5,$$

porque equivale a sumar x^2 a los dos miembros.

(115) CAMBIO DE SIGNOS

Los signos de todos los términos de una ecuación se pueden cambiar sin que la ecuación varíe, porque equivale a multiplicar los dos miembros de la ecuación por −1, con lo cual la igualdad no varía. (Regla 3).

Así, si en la ecuación $-2x - 3 = x - 15$

multiplicamos ambos miembros por −1, para lo cual hay que multiplicar por −1 todos los términos de cada miembro, tendremos:

$$2x + 3 = -x + 15,$$

que es la ecuación dada con los signos de todos sus términos cambiados.

RESOLUCION DE ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

(116) REGLA GENERAL

1) Se efectúan las operaciones indicadas, si las hay.

2) Se hace la transposición de términos, reuniendo en un miembro todos los términos que contengan la incógnita y en el otro miembro todas las cantidades conocidas.

3) Se reducen términos semejantes en cada miembro.

4) Se despeja la incógnita dividiendo ambos miembros de la ecuación por el coeficiente de la incógnita.

Ejemplos

(1) Resolver la ecuación $3x - 5 = x + 3$.

Pasando x al primer miembro y −5 al segundo, cambiándoles los signos, tenemos, $3x - x = 3 + 5$.

Reduciendo términos semejantes:

$$2x = 8$$

Despejando x para lo cual dividimos los dos miembros de la ecuación por 2, tenemos: $\frac{2x}{2} = \frac{8}{2}$ y simplificando $x = 4$.

VERIFICACION

La verificación es la prueba de que el valor obtenido para la incógnita es correcto.

La *verificación* se realiza sustituyendo en los dos miembros de la ecuación dada la incógnita por el valor obtenido, y si éste es correcto, la ecuación dada se convertirá en identidad.

Así, en el caso anterior, haciendo $x = 4$ en la ecuación dada tenemos:

$$3(4) - 5 = 4 + 3$$
$$12 - 5 = 4 + 3$$
$$7 = 7.$$

El valor $x = 4$ *satisface* la ecuación.

(2) Resolver la ecuación: $35 - 22x + 6 - 18x = 14 - 30x + 32$.

Pasando $-30x$ al primer miembro y 35 y 6 al segundo:

$$-22x - 18x + 30x = 14 + 32 - 35 - 6.$$

Reduciendo: $-10x = 5.$

Dividiendo por −5: $2x = -1.$

Despejando x para lo cual dividimos ambos miembros por 2: $x = -\frac{1}{2}.$

VERIFICACION

Haciendo $x = -\frac{1}{2}$ en la ecuación dada, se tiene:

$$35 - 22\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 6 - 18\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 14 - 30\left(-\tfrac{1}{2}\right) + 32$$
$$35 + 11 + 6 + 9 = 14 + 15 + 32$$
$$61 = 61.$$

EJERCICIO 78

Resolver las ecuaciones:

1. $5x = 8x - 15.$
2. $4x + 1 = 2.$
3. $y - 5 = 3y - 25.$
4. $5x + 6 = 10x + 5.$
5. $9y - 11 = -10 + 12y.$
6. $21 - 6x = 27 - 8x.$
7. $11x + 5x - 1 = 65x - 36.$
8. $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14.$
9. $8x + 9 - 12x = 4x - 13 - 5x.$
10. $5y + 6y - 81 = 7y + 102 + 65y.$
11. $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x.$
12. $3x + 101 - 4x - 33 = 108 - 16x - 100.$
13. $14 - 12x + 39x - 18x = 256 - 60x - 657x.$
14. $8x - 15x - 30x - 51x = 53x + 31x - 172.$

RESOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON SIGNOS DE AGRUPACION

Ejemplos

(1) Resolver $3x-(2x-1)=7x-(3-5x)+(-x+24)$

Suprimiendo los signos de agrupación:

$$3x-2x+1=7x-3+5x-x+24.$$

Transponiendo: $3x-2x-7x-5x+x=-3+24-1.$

Reduciendo: $-10x=20$

$$x=-\frac{20}{10}=-2.\quad R.$$

(2) Resolver $5x+\{-2x+(-x+6)\}=18-\{-(7x+6)-(3x-24)\}$

Suprimiendo los paréntesis interiores:

$$5x+\{-2x-x+6\}=18-\{-7x-6-3x+24\}$$

Suprimiendo las llaves:

$$5x-2x-x+6=18+7x+6+3x-24$$
$$5x-2x-x-7x-3x=18+6-24-6$$
$$-8x=-6.$$

Multiplicando por -1: $8x=6.$

Dividiendo por 2: $4x=3.$

$$x=\tfrac{3}{4}.\quad R.$$

EJERCICIO 79

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x-(2x+1)=8-(3x+3).$
2. $15x-10=6x-(x+2)+(-x+3).$
3. $(5-3x)-(-4x+6)=(8x+11)-(3x-6).$
4. $30x-(-x+6)+(-5x+4)=-(5x+6)+(-8+3x).$
5. $15x+(-6x+5)-2-(-x+3)=-(7x+23)-x+(3-2x).$
6. $3x+[-5x-(x+3)]=8x+(-5x-9).$
7. $16x-[3x-(6-9x)]=30x+[-(3x+2)-(x+3)].$
8. $x-[5+3x-\{5x-(6+x)\}]=-3.$
9. $9x-(5x+1)-\{2+8x-(7x-5)\}+9x=0$
10. $71+[-5x+(-2x+3)]=25-[-(3x+4)-(4x+3)].$
11. $-\{3x+8-[-15+6x-(-3x+2)-(5x+4)]-29\}=-5.$

(117) RESOLUCION DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON PRODUCTOS INDICADOS

Ejemplos

(1) Resolver la ecuación

$$10(x-9)-9(5-6x)=2(4x-1)+5(1+2x).$$

Efectuando los productos indicados:

$$10x-90-45+54x=8x-2+5+10x.$$

Suprimiendo $10x$ en ambos miembros por ser cantidades iguales con signos iguales en distintos miembros, queda:

$$-90-45+54x=8x-2+5$$
$$54x-8x=-2+5+90+45$$
$$46x=138$$
$$x=\frac{138}{46}=3.\quad R.$$

VERIFICACION

Haciendo $x=3$ en la ecuación dada, se tiene:

$$10(3-9)-9(5-18)=2(12-1)+5(1+6)$$
$$10(-6)-9(-13)=2(11)+5(7)$$
$$-60+117=22+35$$
$$57=57.$$

$x=3$ satisface la ecuación.

(2) Resolver $4x-(2x+3)(3x-5)=49-(6x-1)(x-2).$

Efectuando los productos indicados:

$$(2x+3)(3x-5)=6x^2-x-15$$
$$(6x-1)(x-2)=6x^2-13x+2.$$

El signo $-$ delante de los productos indicados en cada miembro de la ecuación nos dice que hay que efectuar los productos y *cambiar el signo a cada uno de sus términos*; luego una vez efectuados los productos los *introducimos en paréntesis precedidos del signo* $-$ y tendremos que la ecuación dada se convierte en:

$$4x-(6x^2-x-15)=49-(6x^2-13x+2)$$

Suprimiendo los paréntesis:

$$4x-6x^2+x+15=49-6x^2+13x-2$$
$$4x+x-13x=49-2-15$$
$$-8x=32$$
$$x=-4.\quad R.$$

(3) Resolver $(x+1)(x-2)-(4x-1)(3x+5)-6=8x-11(x-3)(x+7).$

Efectuando los productos indicados:

$$x^2-x-2-(12x^2+17x-5)-6=8x-11(x^2+4x-21)$$

Suprimiendo los paréntesis:

$$x^2-x-2-12x^2-17x+5-6=8x-11x^2-44x+231.$$

En el primer miembro tenemos x^2 y $-12x^2$ que reducidos dan $-11x^2$, y como en el segundo miembro hay otro $-11x^2$, los suprimimos y queda:

$$-x-2-17x+5-6=8x-44x+231$$
$$-x-17x-8x+44x=231+2-5+6$$
$$18x=234$$
$$x=\frac{234}{18}=13.\quad R.$$

(4) Resolver $(3x-1)^2 - 3(2x+3)^2 + 42 = 2x(-x-5) - (x-1)^2$.

Desarrollando los cuadrados de los binomios:

$$9x^2 - 6x + 1 - 3(4x^2 + 12x + 9) + 42 = 2x(-x-5) - (x^2 - 2x + 1)$$

Suprimiendo los paréntesis:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6x + 1 - 12x^2 - 36x - 27 + 42 &= -2x^2 - 10x - x^2 + 2x - 1 \\ -6x - 36x + 10x - 2x &= -1 - 1 + 27 - 42 \\ -34x &= -17 \\ 34x &= 17 \\ x &= \tfrac{17}{34} = \tfrac{1}{2}. \quad \text{R.} \end{aligned}$$

EJERCICIO 80

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $x+3(x-1)=6-4(2x+3)$.
2. $5(x-1)+16(2x+3)=3(2x-7)-x$.
3. $2(3x+3)-4(5x-3)=x(x-3)-x(x+5)$.
4. $184-7(2x+5)=301+6(x-1)-6$.
5. $7(18-x)-6(3-5x)=-(7x+9)-3(2x+5)-12$.
6. $3x(x-3)+5(x+7)-x(x+1)-2(x^2+7)+4=0$.
7. $-3(2x+7)+(-5x+6)-8(1-2x)-(x-3)=0$.
8. $(3x-4)(4x-3)=(6x-4)(2x-5)$.
9. $(4-5x)(4x-5)=(10x-3)(7-2x)$.
10. $(x+1)(2x+5)=(2x+3)(x-4)+5$.
11. $(x-2)^2-(3-x)^2=1$.
12. $14-(5x-1)(2x+3)=17-(10x+1)(x-6)$.
13. $(x-2)^2+x(x-3)=3(x+4)(x-3)-(x+2)(x-1)+2$.
14. $(3x-1)^2-5(x-2)-(2x+3)^2-(5x+2)(x-1)=0$.
15. $2(x-3)^2-3(x+1)^2+(x-5)(x-3)+4(x^2-5x+1)=4x^2-12$.
16. $5(x-2)^2-5(x+3)^2+(2x-1)(5x+2)-10x^2=0$.
17. $x^2-5x+15=x(x-3)-14+5(x-2)+3(13-2x)$.
18. $3(5x-6)(3x+2)-6(3x+4)(x-1)-3(9x+1)(x-2)=0$.
19. $7(x-4)^2-3(x+5)^2=4(x+1)(x-1)-2$.
20. $5(1-x)^2-6(x^2-3x-7)=x(x-3)-2x(x+5)-2$.

EJERCICIO 81

MISCELANEA

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $14x-(3x-2)-[5x+2-(x-1)]=0$.
2. $(3x-7)^2-5(2x+1)(x-2)=-x^2-[-(3x+1)]$.
3. $6x-(2x+1)=-\{-5x+[-(-2x-1)]\}$.
4. $2x+3(-x^2-1)=-\{3x^2+2(x-1)-3(x+2)\}$.
5. $x^2-\{3x+[x(x+1)+4(x^2-1)-4x^2]\}=0$.
6. $3(2x+1)(-x+3)-(2x+5)^2=-[-\{-3(x+5)\}+10x^2]$.
7. $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)(x+1)$.
8. $(x+2)(x+3)(x-1)=(x+4)(x+4)(x-4)+7$.
9. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$.
10. $3(x-2)^2(x+5)=3(x+1)^2(x-1)+3$.

DIOFANTO (325-409 D. C.) Famoso matemático griego perteneciente a la Escuela de Alejandría. Se le tenía hasta hace poco como el fundador del Algebra, pero se sabe hoy que los babilonios y caldeos no ignoraban ninguno de los problemas que abordó Diofanto. Fue, sin embargo, el primero en enunc[iar] una teoría clara sobre las ecuaciones de primer g[ra]do. También ofreció la fórmula para la resol[u]ción de las ecuaciones de segundo grado. Sus ob[ras] ejercieron una considerable influencia sobre Vi[ète].

CAPITULO IX

PROBLEMAS SOBRE ECUACIONES ENTERAS DE PRIMER GRADO CON UNA INCOGNITA

(118) La suma de las edades de A y B es 84 años, y B tiene 8 años menos que A. Hallar ambas edades.

Sea x = edad de A.

Como B tiene 8 años menos que A: $x - 8 =$ edad de B.

La suma de ambas edades es 84 años: luego, tenemos la ecuación: $x + x - 8 = 84$.

Resolviendo:

$$\begin{aligned} x + x &= 84 + 8 \\ 2x &= 92 \\ x &= \tfrac{92}{2} = 46 \text{ años, edad de A.} \quad \text{R.} \end{aligned}$$

La edad de B será: $x - 8 = 46 - 8 = 38$ años. R.

La verificación en los problemas consiste en ver si los resultados obtenidos satisfacen las condiciones del problema.

Así, en este caso, hemos obtenido que la edad de B es 38 años y la de A 46 años; luego, se cumple la condición dada en el problema de que

B tiene 8 años menos que A y ambas edades suman $46+38=84$ años, que es la otra condición dada en el problema.

Luego los resultados obtenidos satisfacen las condiciones del problema.

(119) Pagué \$87 por un libro, un traje y un sombrero. El sombrero costó \$5 más que el libro y \$20 menos que el traje. ¿Cuánto pagué por cada cosa?

Sea x = precio del libro.

Como el sombrero costó \$5 más que el libro: $x+5$ = precio del sombrero.

El sombrero costó \$20 menos que el traje; luego el traje costó \$20 más que el sombrero: $x+5+20=x+25$ = precio del traje.

Como todo costó \$87, la suma de los precios del libro, traje y sombrero tiene que ser igual a \$87; luego, tenemos la ecuación: $x+x+5+x+25=87.$

Resolviendo:

$$3x+30=87$$
$$3x=87-30$$
$$3x=57$$
$$x=\frac{57}{3}=\$19, \text{ precio del libro. R.}$$
$$x+5=19+5=\$24, \text{ precio del sombrero. R.}$$
$$x+25=19+25=\$44, \text{ precio del traje. R.}$$

(120) La suma de tres números enteros consecutivos es 156. Hallar los números.

Sea x = número menor

$x+1$ = número intermedio

$x+2$ = número mayor.

Como la suma de los tres números es 156, se tiene la ecuación $x+x+1+x+2=156.$

Resolviendo:

$$3x+3=156$$
$$3x=156-3$$
$$3x=153$$
$$x=\frac{153}{3}=51, \text{ número menor. R.}$$
$$x+1=51+1=52, \text{ número intermedio. R.}$$
$$x+2=51+2=53, \text{ número mayor. R.}$$

NOTA

Si designamos por x el número mayor, el número intermedio sería $x-1$ y el menor $x-2$.

Si designamos por x el número intermedio, el mayor sería $x+1$ y el menor $x-1$.

EJERCICIO 82

1. La suma de dos números es 106 y el mayor excede al menor en 8. Hallar los números.
2. La suma de dos números es 540 y su diferencia 32. Hallar los números.
3. Entre *A* y *B* tienen 1154 bolívares y *B* tiene 506 menos que *A*. ¿Cuánto tiene cada uno?
4. Dividir el número 106 en dos partes tales que la mayor exceda a la menor en 24.
5. *A* tiene 14 años menos que *B* y ambas edades suman 56 años. ¿Qué edad tiene cada uno?
6. Repartir 1080 soles entre *A* y *B* de modo que *A* reciba 1014 más que *B*.
7. Hallar dos números enteros consecutivos cuya suma sea 103.
8. Tres números enteros consecutivos suman 204. Hallar los números.
9. Hallar cuatro números enteros consecutivos cuya suma sea 74.
10. Hallar dos números enteros pares consecutivos cuya suma sea 194.
11. Hallar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 186.
12. Pagué \$325 por un caballo, un coche y sus arreos. El caballo costó \$80 más que el coche y los arreos \$25 menos que el coche. Hallar los precios respectivos.
13. La suma de tres números es 200. El mayor excede al del medio en 32 y al menor en 65. Hallar los números.
14. Tres cestos contienen 575 manzanas. El primer cesto tiene 10 manzanas más que el segundo y 15 más que el tercero. ¿Cuántas manzanas hay en cada cesto?
15. Dividir 454 en tres partes sabiendo que la menor es 15 unidades menor que la del medio y 70 unidades menor que la mayor.
16. Repartir 310 sucres entre tres personas de modo que la segunda reciba 20 menos que la primera y 40 más que la tercera.
17. La suma de las edades de tres personas es 88 años. La mayor tiene 20 años más que la menor y la del medio 18 años menos que la mayor. Hallar las edades respectivas.
18. Dividir 642 en dos partes tales que una exceda a la otra en 36.

(121) La edad de A es doble que la de B, y ambas edades suman 36 años. Hallar ambas edades.

Sea x = edad de *B*.

Como, según las condiciones, la edad de *A* es doble que la de *B*, tendremos: $2x$ = edad de

Como la suma de ambas edades es 36 años, se tiene la ecuación: $x+2x=$

Resolviendo:

$$3x=36$$
$$x=12 \text{ años, edad de } B. \text{ R.}$$
$$2x=24 \text{ años, edad de } A. \text{ R.}$$

(122) Se ha comprado un coche, un caballo y sus arreos por $350. El coche costó el triplo de los arreos, y el caballo, el doble de lo que costó el coche. Hallar el costo de los arreos, del coche y del caballo.

Sea $x =$ costo de los arreos.

Como el coche costó el triplo de los arreos: $3x =$ costo del coche.

Como el caballo costó el doble del coche: $6x =$ costo del caballo.

Como los arreos, el coche y el caballo costaron \$350, se tiene la ecuación: $x + 3x + 6x = 350.$

Resolviendo: $10x = 350$

$x = \frac{350}{10} = \$\,35,$ costo de los arreos. R.

$3x = 3 \times \$35 = \$105,$ costo del coche. R.

$6x = 6 \times \$35 = \$210,$ costo del caballo. R.

(123) Repartir 180 bolívares entre A, B y C de modo que la parte de A sea la mitad de la de B y un tercio de la de C.

Si la parte de A es la mitad de la de B, la parte de B es doble que la de A; y si la parte de A es un tercio de la de C, la parte de C es el triplo de la de A. Entonces, sea:

$x =$ parte de A.

$2x =$ parte de B.

$3x =$ parte de C.

Como la cantidad repartida es bs. 180, la suma de las partes de cada uno tiene que ser igual a bs. 180; luego, tendremos la ecuación: $x + 2x + 3x = 180.$

Resolviendo: $6x = 180$

$x = \frac{180}{6} =$ bs. 30, parte de A. R.

$2x =$ bs. 60, parte de B. R.

$3x =$ bs. 90, parte de C. R.

EJERCICIO 83

1. La edad de Pedro es el triplo de la de Juan y ambas edades suman 40 años. Hallar ambas edades.
2. Se ha comprado un caballo y sus arreos por \$600. Si el caballo costó 4 veces los arreos, ¿cuánto costó el caballo y cuánto los arreos?
3. En un hotel de 2 pisos hay 48 habitaciones. Si las habitaciones del segundo piso son la mitad de las del primero, ¿cuántas habitaciones hay en cada piso?
4. Repartir 300 colones entre A, B y C de modo que la parte de B sea doble que la de A y la de C el triplo de la de A.
5. Repartir 133 sucres entre A, B y C de modo que la parte de A sea la mitad de la de B y la de C doble de la de B.

6. El mayor de dos números es 6 veces el menor y ambos números suman 147. Hallar los números.
7. Repartir 140 quetzales entre A, B y C de modo que la parte de B sea la mitad de la de A y un cuarto de la de C.
8. Dividir el número 850 en tres partes de modo que la primera sea el cuarto de la segunda y el quinto de la tercera.
9. El duplo de un número equivale al número aumentado en 111. Hallar el número.
10. La edad de María es el triplo de la de Rosa más quince años y ambas edades suman 59 años. Hallar ambas edades.
11. Si un número se multiplica por 8 el resultado es el número aumentado en 21. Hallar el número.
12. Si al triplo de mi edad añado 7 años, tendría 100 años. ¿Qué edad tengo?
13. Dividir 96 en tres partes tales que la primera sea el triplo de la segunda y la tercera igual a la suma de la primera y la segunda.
14. La edad de Enrique es la mitad de la de Pedro; la de Juan el triplo de la de Enrique y la de Eugenio el doble de la de Juan. Si las cuatro edades suman 132 años, ¿qué edad tiene cada uno?

(124) La suma de las edades de A, B y C es 69 años. La edad de A es doble que la de B y 6 años mayor que la de C. Hallar las edades.

Sea $x =$ edad de B.

$2x =$ edad de A.

Si la edad de A es 6 años mayor que la de C, la edad de C es 6 años menor que la de A; luego, $2x - 6 =$ edad de C.

Como las tres edades suman 69 años, tendremos la ecuación $x + 2x + 2x - 6 =$

Resolviendo: $5x - 6 = 69$

$5x = 69 + 6$

$5x = 75$

$x = \frac{75}{5} = 15$ años, edad de B. R.

$2x = 30$ años, edad de A. R.

$2x - 6 = 24$ años, edad de C. R.

EJERCICIO 84

1. Dividir 254 en tres partes tales que la segunda sea el triplo de la primera y 40 unidades mayor que la tercera.
2. Entre A, B y C tienen 130 balboas. C tiene el doble de lo que tiene A y 15 balboas menos que B. ¿Cuánto tiene cada uno?
3. La suma de tres números es 238. El primero excede al duplo del segundo en 8 y al tercero en 18. Hallar los números.
4. Se ha comprado un traje, un bastón y un sombrero por \$259. El traje costó 8 veces lo que el sombrero y el bastón \$30 menos que el traje. Hallar los precios respectivos.

5. La suma de tres números es 72. El segundo es $\frac{1}{5}$ del tercero y el primero excede al tercero en 6. Hallar los números.
6. Entre A y B tienen 99 bolívares. La parte de B excede al triplo de la de A en 19. Hallar la parte de cada uno.
7. Una varilla de 74 cm de longitud se ha pintado de azul y blanco. La parte pintada de azul excede en 14 cm al duplo de la parte pintada de blanco. Hallar la longitud de la parte pintada de cada color.
8. Repartir \$152 entre A, B y C de modo que la parte de B sea \$8 menos que el duplo de la de A y \$32 más que la de C.
9. El exceso de un número sobre 80 equivale al exceso de 220 sobre el duplo del número. Hallar el número.
10. Si me pagaran 60 sucres tendría el doble de lo que tengo ahora más 10 sucres. ¿Cuánto tengo?
11. El asta de una bandera de 9.10 m de altura se ha partido en dos. La parte separada tiene 80 cm menos que la otra parte. Hallar la longitud de ambas partes del asta.
12. Las edades de un padre y su hijo suman 83 años. La edad del padre excede en 3 años al triplo de la edad del hijo. Hallar ambas edades.
13. En una elección en que había 3 candidatos A, B y C se emitieron 9000 votos. B obtuvo 500 votos menos que A y 800 votos más que C. ¿Cuántos votos obtuvo el candidato triunfante?
14. El exceso de 8 veces un número sobre 60 equivale al exceso de 60 sobre 7 veces el número. Hallar el número.
15. Preguntado un hombre por su edad, responde: Si al doble de mi edad se quitan 17 años se tendría lo que me falta para tener 100 años. ¿Qué edad tiene el hombre?

(125) **Dividir 85 en dos partes tales que el triplo de la parte menor equivalga al duplo de la mayor.**

Sea x = la parte menor.

Tendremos: $85 - x$ = la parte mayor.

El problema me dice que el triplo de la parte menor, $3x$, equivale al duplo de la parte mayor, $2(85 - x)$; luego, tenemos la ecuación $3x = 2(85 - x)$.

Resolviendo:
$$3x = 170 - 2x$$
$$3x + 2x = 170$$
$$5x = 170$$
$$x = \frac{170}{5} = 34, \text{ parte menor. R.}$$
$$85 - x = 85 - 34 = 51, \text{ parte mayor. R.}$$

(126) **Entre A y B tienen \$81. Si A pierde \$36, el duplo de lo que le queda equivale al triplo de lo que tiene B ahora. ¿Cuánto tiene cada uno?**

Sea x = número de pesos que tiene A.

$81 - x$ = número de pesos que tiene B.

Si A pierde \$36, se queda con $\$(x - 36)$ y el duplo de esta cantidad $2(x - 36)$ equivale al triplo de lo que tiene B ahora, o sea, al triplo de $81 - x$; luego, tenemos la ecuación: $2(x - 36) = 3(81 - x)$

Resolviendo:
$$2x - 72 = 243 - 3x$$
$$2x + 3x = 243 + 72$$
$$5x = 315$$
$$x = \frac{315}{5} = \$63, \text{ lo que tiene } A. \text{ R.}$$
$$81 - x = 81 - 63 = \$18, \text{ lo que tiene } B. \text{ R.}$$

EJERCICIO 85

1. La suma de dos números es 100 y el duplo del mayor equivale al triplo del menor. Hallar los números.
2. Las edades de un padre y su hijo suman 60 años. Si la edad del padre se disminuyera en 15 años se tendría el doble de la edad del hijo. Hallar ambas edades.
3. Dividir 1080 en dos partes tales que la mayor disminuida en 132 equivalga a la menor aumentada en 100.
4. Entre A y B tienen 150 soles. Si A pierde 46, lo que le queda equivale a lo que tiene B. ¿Cuánto tiene cada uno?
5. Dos ángulos suman 180° y el duplo del menor excede en 45° al mayor. Hallar los ángulos.
6. La suma de dos números es 540 y el mayor excede al triplo del menor en 88. Hallar los números.
7. La diferencia de dos números es 36. Si el mayor se disminuye en 12 se tiene el cuádruplo del menor. Hallar los números.
8. Un perro y su collar han costado \$54, y el perro costó 8 veces lo que el collar. ¿Cuánto costó el perro y cuánto el collar?
9. Entre A y B tienen \$84. Si A pierde \$16 y B gana \$20, ambos tienen lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?
10. En una clase hay 60 alumnos entre jóvenes y señoritas. El número de señoritas excede en 15 al duplo de los jóvenes. ¿Cuántos jóvenes hay en la clase y cuántas señoritas?
11. Dividir 160 en dos partes tales que el triplo de la parte menor disminuido en la parte mayor equivalga a 16.
12. La suma de dos números es 506 y el triplo del menor excede en 50 al mayor aumentado en 100. Hallar los números.
13. Una estilográfica y un lapicero han costado 18 bolívares. Si la estilográfica hubiera costado 6 bolívares menos y el lapicero 4 bolívares más, habrían costado lo mismo. ¿Cuánto costó cada uno?
14. Una varilla de 84 cm de longitud está pintada de rojo y negro. La parte roja es 4 cm menor que la parte pintada de negro. Hallar la longitud de cada parte.

127 **La edad de A es doble que la de B y hace 15 años la edad de A era el triplo de la de B. Hallar las edades actuales.**

Sea $x =$ número de años que tiene B ahora.
$2x =$ número de años que tiene A ahora.

Hace 15 años, la edad de A era $2x - 15$ años y la edad de B era $(x - 15)$ años y como el problema me dice que la edad de A hace 15 años, $(2x - 15)$, era igual al triplo de la edad de B hace 15 años o sea el triplo de $x - 15$, tendremos la ecuación: $2x - 15 = 3(x - 15)$.

Resolviendo:
$$2x - 15 = 3x - 45$$
$$2x - 3x = -45 + 15$$
$$-x = -30$$
$$x = 30 \text{ años, edad actual de } B. \quad R.$$
$$2x = 60 \text{ años, edad actual de } A. \quad R.$$

128 **La edad de A es el triplo de la de B y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.**

Sea $x =$ número de años que tiene B ahora.
$3x =$ número de años que tiene A ahora.

Dentro de 20 años, la edad de A será $(3x + 20)$ años y la de B será $(x + 20)$ años. El problema me dice que la edad de A dentro de 20 años, $3x + 20$, será igual al doble de la edad de B dentro de 20 años, o sea, igual al doble de $x + 20$; luego, tendremos la ecuación $3x + 20 = 2(x + 20)$.

Resolviendo:
$$3x + 20 = 2x + 40$$
$$3x - 2x = 40 - 20$$
$$x = 20 \text{ años, edad actual de } B. \quad R.$$
$$3x = 60 \text{ años, edad actual de } A. \quad R.$$

EJERCICIO 86

1. La edad actual de A es doble que la de B, y hace 10 años la edad de A era el triplo de la de B. Hallar las edades actuales.
2. La edad de A es triple que la de B y dentro de 5 años será el doble. Hallar las edades actuales.
3. A tiene doble dinero que B. Si A pierde \$10 y B pierde \$5, A tendrá \$20 más que B. ¿Cuánto tiene cada uno?
4. A tiene la mitad de lo que tiene B. Si A gana 66 colones y B pierde 90, A tendrá el doble de lo que le quede a B. ¿Cuánto tiene cada uno?
5. En una clase el número de señoritas es $\frac{1}{3}$ del número de varones. Si ingresaran 20 señoritas y dejaran de asistir 10 varones, habría 6 señoritas más que varones. ¿Cuántos varones hay y cuántas señoritas?

6. La edad de un padre es el triplo de la edad de su hijo. La edad que tenía el padre hace 5 años era el duplo de la edad que tendrá su hijo dentro de 10 años. Hallar las edades actuales.
7. La suma de dos números es 85 y el número menor aumentado en 36 equivale al doble del mayor disminuido en 20. Hallar los números.
8. Enrique tiene 5 veces lo que tiene su hermano. Si Enrique le diera a su hermano 50 cts., ambos tendrían lo mismo. ¿Cuánto tiene cada uno?
9. Un colono tiene 1400 sucres en dos bolsas. Si de la bolsa que tiene más dinero saca 200 y los pone en la otra bolsa, ambas tendrían igual cantidad de dinero. ¿Cuánto tiene cada bolsa?
10. El número de días que ha trabajado Pedro es 4 veces el número de días que ha trabajado Enrique. Si Pedro hubiera trabajado 15 días menos y Enrique 21 días más, ambos habrían trabajado igual número de días. ¿Cuántos días trabajó cada uno?
11. Hace 14 años la edad de un padre era el triplo de la edad de su hijo y ahora es el doble. Hallar las edades respectivas hace 14 años.
12. Dentro de 22 años la edad de Juan será el doble de la de su hijo y actualmente es el triplo. Hallar las edades actuales.
13. Entre A y B tienen \$84. Si A gana \$80 y B gana \$4, A tendrá el triplo de lo que tenga B. ¿Cuánto tiene cada uno?

129 **Un hacendado ha comprado doble número de vacas que de bueyes. Por cada vaca pagó \$70 y por cada buey \$85. Si el importe de la compra fue de \$2700, ¿cuántas vacas compró y cuántos bueyes?**

Sea $x =$ número de bueyes.
$2x =$ número de vacas.

Si se han comprado x bueyes y cada buey costó \$85, los x bueyes costaron \$$85x$ y si se han comprado $2x$ vacas y cada vaca costó \$70, las $2x$ vacas costaron $\$70 \times 2x = \$140x$. Como el importe total de la compra ha sido \$2700, tendremos la ecuación: $85x + 140x = 2700$.

Resolviendo:
$$225x = 2700$$
$$x = \frac{2700}{225} = 12, \text{ número de bueyes.} \quad R.$$
$$2x = 2 \times 12 = 24, \text{ número de vacas.} \quad R.$$

130 **Se han comprado 96 aves entre gallinas y palomas. Cada gallina costó 80 cts. y cada paloma 65 cts. Si el importe de la compra ha sido \$69.30, ¿cuántas gallinas y cuántas palomas se han comprado?**

Sea $x =$ número de gallinas.
$96 - x =$ número de palomas.

Si se han comprado x gallinas y cada gallina costó 80 cts., las x gallinas costaron $80x$ cts.

Si se han comprado $96-x$ palomas y cada paloma costó 65 cts., las $96-x$ palomas costaron $65(96-x)$ cts.

Como el importe total de la compra fue \$69.30, o sea 6930 cts., tendremos la ecuación: $80x+65(96-x)=6930$.

Resolviendo:
$$80x+6240-65x=6930$$
$$80x-65x=6930-6240$$
$$15x=690$$
$$x=\frac{690}{15}=46, \text{ número de gallinas.} \quad \text{R.}$$
$$96-x=96-46=50, \text{ número de palomas.} \quad \text{R.}$$

EJERCICIO 87

1. Compré doble número de sombreros que de trajes por 702 balboas. Cada sombrero costó 2 y cada traje 50. ¿Cuántos sombreros y cuántos trajes compré?
2. Un hacendado compró caballos y vacas por 40000 bolívares. Por cada caballo pagó 600 y por cada vaca 800. Si compró 6 vacas menos que caballos, ¿cuántas vacas y cuántos caballos compró?
3. Un padre pone 16 problemas a su hijo con la condición de que por cada problema que resuelva el muchacho recibirá 12 cts. y por cada problema que no resuelva perderá 5 cts. Después de trabajar en los 16 problemas el muchacho recibe 73 cts. ¿Cuántos problemas resolvió y cuántos no resolvió?
4. Un capataz contrata un obrero por 50 días pagándole \$3 por cada día de trabajo con la condición de que por cada día que el obrero deje de asistir al trabajo perderá \$2. Al cabo de los 50 días el obrero recibe \$90. ¿Cuántos días trabajó y cuántos no trabajó?
5. Un comerciante compró 35 trajes de a 30 quetzales y de a 25 quetzales, pagando por todos Q. 1015. ¿Cuántos trajes de cada precio compró?
6. Un comerciante compró trajes de dos calidades por 1624 balboas. De la calidad mejor compró 32 trajes y de la calidad inferior 18. Si cada traje de la mejor calidad le costó 7 balboas más que cada traje de la calidad inferior, ¿cuál era el precio de un traje de cada calidad?
7. Un muchacho compró triple número de lápices que de cuadernos. Cada lápiz le costó a 5 cts. y cada cuaderno 6 cts. Si por todo pagó \$1.47, ¿cuántos lápices y cuántos cuadernos compró?
8. Pagué \$582 por cierto número de sacos de azúcar y de frijoles. Por cada saco de azúcar pagué \$5 y por cada saco de frijoles \$6. Si el número de sacos de frijoles es el triplo del número de sacos de azúcar más 5, ¿cuántos sacos de azúcar y cuántos de frijoles compré?
9. Se han comprado 80 pies cúbicos de madera por \$68.40. La madera comprada es cedro y caoba. Cada pie cúbico de cedro costó 75 cts. y cada pie cúbico de caoba 90 cts. ¿Cuántos pies cúbicos he comprado de cedro y cuántos de caoba?
10. Dividir el número 1050 en dos partes tales que el triplo de la parte mayor disminuido en el duplo de la parte menor equivalga a 1825.

EJERCICIO 88

MISCELANEA

1. Dividir 196 en tres partes tales que la segunda sea el duplo de la primera y la suma de las dos primeras exceda a la tercera en 20.
2. La edad de A es triple que la de B y hace 5 años era el cuádruplo de la de B. Hallar las edades actuales.
3. Un comerciante adquiere 50 trajes y 35 pares de zapatos por 16000 soles. Cada traje costó el doble de lo que costó cada par de zapatos más 50 soles. Hallar el precio de un traje y de un par de zapatos.
4. 6 personas iban a comprar una casa contribuyendo por partes iguales pero dos de ellas desistieron del negocio y entonces cada una de las restantes tuvo que poner 2000 bolívares más. ¿Cuál era el valor de la casa?
5. La suma de dos números es 108 y el doble del mayor excede al triplo del menor en 156. Hallar los números.
6. El largo de un buque, que es 461 pies, excede en 11 pies a 9 veces el ancho. Hallar el ancho.
7. Tenía \$85. Gasté cierta suma y lo que me queda es el cuádruplo de lo que gasté. ¿Cuánto gasté?
8. Hace 12 años la edad de A era el doble de la de B y dentro de 12 años, la edad de A será 68 años menos que el triplo de la de B. Hallar las edades actuales.
9. Tengo \$1.85 en monedas de 10 y 5 centavos. Si en total tengo 22 monedas, ¿cuántas son de 10 centavos y cuántas de 5 centavos?
10. Si a un número se resta 24 y la diferencia se multiplica por 12, el resultado es el mismo que si al número se resta 27 y la diferencia se multiplica por 24. Hallar el número.
11. Un hacendado compró 35 caballos. Si hubiera comprado 5 caballos más por el mismo precio, cada caballo le habría costado \$10 menos. ¿Cuánto le costó cada caballo?
12. El exceso del triplo de un número sobre 55 equivale al exceso de 233 sobre el número. Hallar el número.
13. Hallar tres números enteros consecutivos, tales que el duplo del menor más el triplo del mediano más el cuádruplo del mayor equivalga a 740.
14. Un hombre ha recorrido 150 kilómetros. En auto recorrió una distancia triple que a caballo y a pie, 20 kilómetros menos que a caballo. ¿Cuántos kilómetros recorrió de cada modo?
15. Un hombre deja una herencia de 16500 colones para repartir entre 3 hijos y 2 hijas, y manda que cada hija reciba 2000 más que cada hijo. Hallar la parte de cada hijo y de cada hija.
16. La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 31. Hallar los números.
17. La edad de A es el triplo de la de B, y la de B 5 veces la de C. B tiene 12 años más que C. ¿Qué edad tiene cada uno?

18. Dentro de 5 años la edad de A será el triplo de la de B, y 15 años después la edad de A será el duplo de la de B. Hallar las edades actuales.
19. El martes gané el doble de lo que gané el lunes; el miércoles el doble de lo que gané el martes; el jueves el doble de lo que gané el miércoles; el viernes \$30 menos que el jueves y el sábado \$10 más que el viernes. Si en los 6 días he ganado \$911, ¿cuánto gané cada día?
20. Hallar dos números cuya diferencia es 18 y cuya suma es el triplo de su diferencia.
21. Entre A y B tienen \$36. Si A perdiera \$16, lo que tiene B sería el triplo de lo que le quedaría a A. ¿Cuánto tiene cada uno?
22. A tiene el triplo de lo que tiene B, y B el doble de lo de C. Si A pierde \$1 y B pierde \$3, la diferencia de lo que les queda a A y a B es el doble de lo que tendría C si ganara \$20. ¿Cuánto tiene cada uno?
23. 5 personas han comprado una tienda contribuyendo por partes iguales. Si hubiera habido 2 socios más, cada uno hubiera pagado 800 bolívares menos. ¿Cuánto costó la tienda?
24. Un colono compró dos caballos, pagando por ambos \$120. Si el caballo peor hubiera costado \$15 más, el mejor habría costado doble que él. ¿Cuánto costó cada caballo?
25. A y B empiezan a jugar con 80 quetzales cada uno. ¿Cuánto ha perdido A si B tiene ahora el triplo de lo que tiene A?
26. A y B empiezan a jugar teniendo A doble dinero que B. A pierde \$400 y entonces B tiene el doble de lo que tiene A. ¿Con cuánto empezó a jugar cada uno?
27. Compré cuádruple número de caballos que de vacas. Si hubiera comprado 5 caballos más y 5 vacas más tendría triple número de caballos que de vacas. ¿Cuántos caballos y cuántas vacas compré?
28. En cada día, de lunes a jueves, gané \$6 más que lo que gané el día anterior. Si el jueves gané el cuádruplo de lo que gané el lunes, ¿cuánto gané cada día?
29. Tenía cierta suma de dinero. Ahorré una suma igual a lo que tenía y gasté 50 soles; luego ahorré una suma igual al doble de lo que me quedaba y gasté 390 soles. Si ahora no tengo nada, ¿cuánto tenía al principio?
30. Una sala tiene doble largo que ancho. Si el largo se disminuye en 6 m y el ancho se aumenta en 4 m, la superficie de la sala no varía. Hallar las dimensiones de la sala.
31. Hace 5 años la edad de un padre era tres veces la de su hijo y dentro de 5 años será el doble. ¿Qué edades tienen ahora el padre y el hijo?
32. Dentro de 4 años la edad de A será el triplo de la de B, y hace 2 años era el quíntuplo. Hallar las edades actuales.

HYPATIA (370-415 D. C.) Una excepcional mujer griega, hija del filósofo y matemático Teón. Se hizo célebre por su saber, por su elocuencia y por su belleza. Nacida en Alejandría, viaja a Atenas donde realiza estudios; al regresar a Alejandría funda una escuela donde enseña las doctrinas de Platón y A-tóteles y se pone al frente del pensamiento neo-tónico. Hypatia es uno de los últimos matemát griegos. Se distinguió por los comentarios a las ol de Apolonio y Diofanto. Murió asesinada bárbaram

CAPITULO

DESCOMPOSICION FACTORIAL

131 FACTORES

Se llama **factores** o **divisores** de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.

Así, multiplicando a por $a+b$ tenemos:

$$a(a+b)=a^2+ab$$

a y $a+b$, que multiplicadas entre sí dan como producto a^2+ab, son factores o divisores de a^2+ab.

Del propio modo.

$$(x+2)(x+3)=x^2+5x+6$$

luego, $x+2$ y $x+3$ son factores de x^2+5x+6.

132 DESCOMPONER EN FACTORES O FACTORAR una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores.

133 FACTORAR UN MONOMIO

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección. Así, los factores de $15ab$ son 3, 5, a y b. Por tanto:

$$15ab=3 . 5 a b.$$